

I. megoldás. Egy pozitív szám osztóit párokba tudjuk állítani úgy, hogy egy-egy pár szorzata magát a számot adja. A szorzat tényezői közül a kisebbik értéke legfeljebb $\sqrt{n}$. (Ugyanis, ha mindkét tényező nagyobb lenne $\sqrt{n}$ -nél, szorzatuk nagyobb lenne n -nél. Például 12 osztóit így párba állítva: 1, 12; 2, 6; 3, 4, és $3 < \sqrt{12}$, vagy 36 osztói 1, 36; 2, 18, 3, 12, 4, 9; és a pár nélkül maradt $6 = \sqrt{36}$.)

Az n szám osztóinak száma tehát legfeljebb $2 \lceil \sqrt{n} \rceil$ lehet. (A szögletes zárójel a szám egészrészét – a nála nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat – jelöli.)

A keresett pozitív egész számok így csak azon n értékek közül kerülhetnek ki, amelyekre

$$\frac{n}{2} \leq 2 \lceil \sqrt{n} \rceil, \quad \text{így} \quad n \leq 4 \lceil \sqrt{n} \rceil \leq 4\sqrt{n}.$$

Innen $\sqrt{n} \leq 4$, ezért n értéke legfeljebb 16 lehet, s mivel esetünkben $\frac{n}{2}$ pozitív egész, n értéke 2, 4, 6, 8, 10, 14 vagy 16.

Ha felírjuk ezek osztóit, láthatjuk, hogy csak a 8 és 12 tesz eleget a feladat követelményeinek.

II. megoldás. Mivel az osztók száma egész, ezért $n = 2k$ alakú. A 2 osztóinak a száma $2 \neq \frac{2}{2}$ és 4 osztóinak a száma $3 \neq \frac{4}{2}$, így $k \geq 3$. Eszerint $1 \leq k-2 < k-1 < k$. Ha $k-1$ és $k-2$ egyike sem volna $(2k)$ -nak osztója, akkor $(2k)$ -nak az 1-től k -ig terjedő számok között legfeljebb $k-2$ darab osztója volna. Tekintettel arra, hogy már $(k+1)$ -nek a kétszerese is nagyobb $(2k)$ -nál, ezért a k -nál nagyobb számok közül egyedül a $2k$ osztója n -nek; és így az osztók száma legfeljebb $k-1$ lenne. Az osztók száma tehát csak akkor lehet legalább k , ha e két szám valamelyike osztója n -nek.

Ha $2k$ osztható $(k-1)$ -gyel, akkor $2 = 2k - 2(k-1)$ is osztható $(k-1)$ -gyel. Ha $2k$ osztható $(k-2)$ -vel, akkor $4 = 2k - 2(k-2)$ is osztható $(k-2)$ -vel. $k \geq 3$ miatt az első esetben $k-1 = 2$; a második esetben $k-2$ vagy 1, vagy 2, vagy 4 – hiszen ezek 4-nek az összes pozitív osztói. Ennek megfelelően a k -ra szóba jövő értékek 3; illetve 3, 4 és 6. Tehát a lehetséges megoldások 6, 8 és 12. Mint az előző megoldásnál láttuk, ezek közül csak az $n = 8$ és $n = 12$ felel meg.