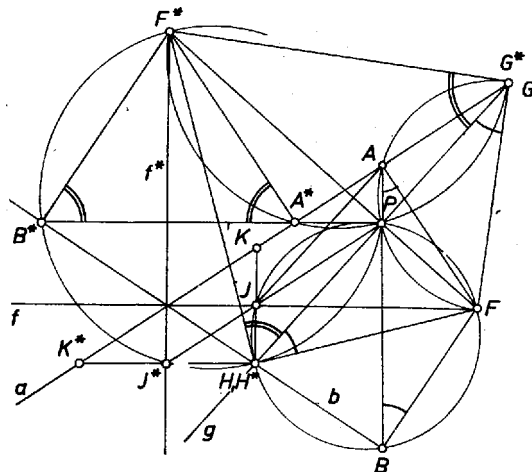


I. megoldás. Messe a kérdéses merőleges a -t G -ben, b -t H -ban, ekkor elég belátnunk az FGH és FHG szögek egyenlőségét, hiszen így FGH egyenlő szárú háromszög, és FP magassága felezi a GH alapot. Válasszuk a betűzést úgy, hogy a és b közül a P -hez közelebbi legyen a .

Legyen először f az a és b közti négy szögtartomány közül annak a felezője, amelyikben P benne van, és messe az t -re merőleges PA egyenes b -t B -ben. P az AB szakaszon van, F ugyanebben a szögtartományban adódik, és G az FP egyenesnek azon a partján, amelyiken A van, B és H pedig a másik partján. $FPAG$ és $FPBH$ húrnégyszögek, mert az FG szakasz A -ból és P -ből, FH pedig P -ből és B -ből derékszögben látszik, hiszen B az A tükörképe f -re, és így FB merőleges b -re. Mivel még P a GH szakasz belső pontja, azért

$$FGH\angle = FGP\angle = FAP\angle = FBP\angle = FHP\angle = FHG\angle.$$

Ezt akartuk bizonyítani, ebből – mint láttuk – az állítás egyszerűen következik.



f -ként a P -t tartalmazó a , b szögtartománnyal szomszédos szögtartományok felezőjét véve – legyen ez f^* , és az így szerkesztett pontok A^* , F^* , G^* , H^* és B^* , meg gondolásunk csak abban változik, hogy F^*P szétválasztja az A^* , G^* pontpárt és hogy A^* van a PB^* szakaszon. A megfelelő húrnégyszögekből ekkor is

$$\begin{aligned} F^*G^*H^*\angle &= F^*G^*P\angle = 180^\circ - F^*A^*P\angle = F^*A^*B^*\angle = F^*B^*A^*\angle = \\ &F^*B^*P\angle = F^*H^*P\angle = F^*H^*G^*\angle. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Az állítás fordítottját bizonyítjuk, megmutatjuk, hogy ha P felezi a g egyenesnek az a és b közé eső GH szakaszát, akkor FP merőleges g -re. Ebből az állítás akkor következik, ha azt is belátjuk, hogy P a rajta átmenő egyenesek közül csak egynek felezi az a és b közti szakaszát. Ez abból adódik, hogy pl. G -t b -nek P -re vett tükörképe metszi ki a -ból.

Messe a H -n átmenő, f -re merőleges egyenes f -et J -ben, a -t K -ban. H és K tükrös pár f -re, ezért J felezi HK -t, és mivel még $HK \parallel AP$, azért PAJ a KHG háromszög középháromszöge, $PJ \parallel a$ és $AJ \parallel g$. Így F a PAJ háromszög magasságpontja, hiszen itt metszi egymást a J -ből és A -ból kiinduló magasságvonal. Ezért PF merőleges AJ -re és a vele párhuzamos g -re is, amint állítottuk.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. Bizonyításunk mindkét szögfelezőre egyformán érvényes.