

I. megoldás. Olyan felbontást keresünk, melyben mindkét tényező-polinom másodfokú és x^2 együtthatója mindkettőben 1. Feladatunk a további p, q , illetve r, s együtthatók meghatározása úgy, hogy

$$(x^2 + px + q) \cdot (x^2 + rx + s) = x^4 + (p + r)x^3 + (q + pr + s)x^2 + (qr + ps)x + qs = \\ = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

azonosság legyen. Ez teljesül, ha x^3, x^2, x együtthatója és az x -et nem tartalmazó tag a két oldalon rendre egyenlő, azaz, ha

$$\begin{array}{lll} (1) & p + r = 1, & (2) \quad q + pr + s = 1, \\ (3) & qr + ps = 1, & (4) \quad qs = 1. \end{array}$$

(3)-at q -val megszorozva, (1) és (4) felhasználásával kiküszöbölhetjük r -et és s -et. (1)-ből $r = 1 - p$, így

$$(5) \quad \begin{aligned} q^2 r + qps &= q^2(1 - p) + p = q, \\ q^2 - q - p(q^2 - 1) &= (q - 1)(q - pq - p) = 0. \end{aligned}$$

Ez mindenesetre teljesül, ha $q = 1$, amikor (4)-ből $s = 1$, (2)-ből $pr = -1$, és (1)-et is tekintetbe véve p és r a

$$(6) \quad (z - p)(z - r) = z^2 - (p + r)z + pr = z^2 - z - 1 = 0$$

egyenlet gyökei, tehát az $(1 + \sqrt{5})/2$ és $(1 - \sqrt{5})/2$ értékek. Ezekkel fennáll a

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right) \left(x^2 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}x + 1\right)$$

azonosság. Ezzel megkaptunk egy kívánt alakú felbontást.

Megjegyzések. 1. Egy első és egy harmadfokú, valós együtthatós tényezőre való felbontás nem létezik, mert különben volna $P(x)$ -nek valós 0-helye, de az a talált felbontás valamelyik tényezőjének is 0-helye volna. Ámde mindkét tényező diszkriminánsa negatív, s így egyiknek sincs valós 0-helye.

2. Világos, hogy $q = 1$ választás mellett a föntin kívül csak olyan, két másodfokú valós együtthatós tényezőből álló felbontás nyerhető, amelyik abból az egyik tényezőnek egy 0-tól különböző c számmal, a másiknak $1/c$ -vel való szorzásával keletkezik. Ha viszont a $q - pq - p = 0$ egyenletből indulunk ki, akkor (2)-ből pl. p -re negyedfokú egyenletet nyerünk, ami teljes négyzetté kiegészítésén keresztül másodfokú tényezőkre bontható, de azok egyikének sincs valós 0-helye. Így nincs a fentitől lényegesen különböző, valós együtthatós felbontás másodfokú tényezőkre sem.

II. megoldás. A polinomot $x^2 + 1$ hatványai szerint rendezhetjük:

$$P(x) = x^4 + 1 + x(x^2 + 1) + x^2 = (x^2 + 1)^2 + x(x^2 + 1) - x^2.$$

Egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté, így két négyzet különbsége keletkezik, amit már szorzattá alakíthatunk:

$$P(x) = \left(x^2 + 1 + \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{5}{4}x^2 = \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + 1\right) \cdot \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + 1\right).$$

Megjegyzések. 1. Az eljárás általában alkalmazható $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1$ alakú, ún. szimmetrikus polinomokra, és nem különbözik lényegesen attól a szokásos eljárástól, amely szerint a polinom $1/x^2$ -szeresét az $y = x + \frac{1}{x}$ új változóval fejezzük ki.

Az itt vázolt úton mindig eljutunk két, valós együtthatós másodfokú tényezőre bontáshoz, ha $a^2 - 4b + 8 \geq 0$.

2. Az I. megoldás gondolatmenete is alkalmazható az említett általánosabb esetben, és célra vezet, bármilyen értékek is az együtthatók.