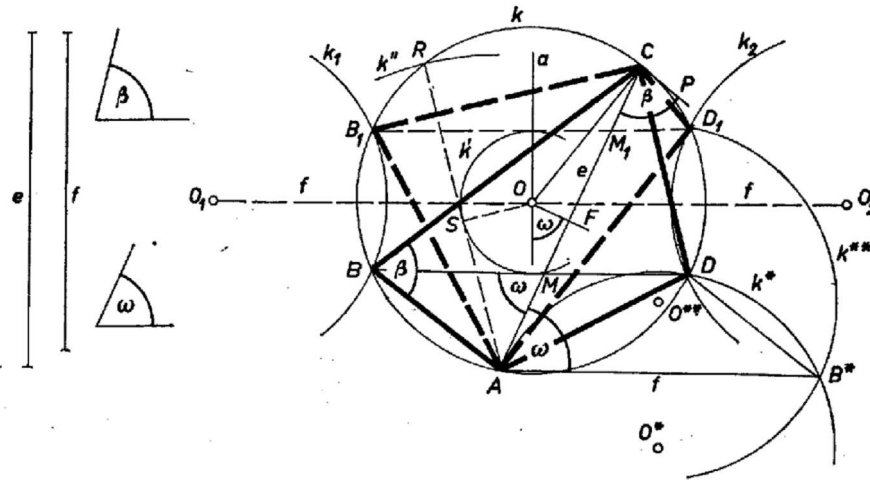


I. megoldás. Legyen $ABCD$ a feltételeket kielégítő négyszög, $AC = e \geq f = BD$ az adott hosszúságú átlók, metszéspontjuk M , $ABC \sphericalangle = \beta$, és $AMB \sphericalangle = \omega$ az adott szögek. A betűzés alkalmas választásával feltehetjük, hogy $\omega \leq 90^\circ$.



2. ábra

Az adatokból megszerkeszthető a négyszög köré írható k kör, mint olyan kör, amelynek egyik ívéről az e szakasz β szögben látszik. Ezután f hosszúságú húr kell elhelyeznünk úgy, hogy az az e hosszúságú húr ω szögben messe.

A k kör f hosszúságú húrjai felezőpontjukban érintenek egy k -val koncentrikus k' kört. Ehhez kell AC -vel ω szöget bezáró érintőt szerkeszteni.

Ezek alapján a szerkesztés pl. a következő módon végezhető: $AC = e$ hosszúságú szakaszt rajzolunk, és erre $ACP \sphericalangle = \beta$ szöget szerkesztünk; a CP -re C -ben szerkesztett merőlegesnek és az AC -re F felezőpontjában állított merőlegesnek O metszéspontja körül C -n át szerkesztett k kör a négyszög köré írt kör. Ezt pl. A -ból f sugarú körrel egyik irányban elmetsszük az R pontban.

Az AR -re O -ból bocsátott merőleges S talppontján át O körül húzott kör k' . Szerkesszük meg O -n át azt az a egyenest, amelyik AC felező merőlegesének AC felé haladó félegyenesével az egyenes A -t tartalmazó partján ω szöget zár be. Ennek k' -vel való metszéspontjaiban k' -höz húzott érintők (a -ra állított merőlegesek) k -ba eső húrjai f hosszúságúak és egyenesük AC -vel ω szöget zár be, mert e hajlásszög szárai a -ra, ill. OF -re merőlegesek.

Ahhoz, hogy az A és C pont és a most szerkesztett valamelyik húr végpontjai meghatározza négyszögben az e és f hosszúságú húr átló legyen, kell, hogy a kettő messe egymást. Ha ez teljesül, akkor jelöljük D -vel az f hosszúságú húrnak azt a végpontját, amelyik az AC egyenesnek ugyanazon a partján van, mint P , a másik végpontot B -vel. Így a kerületi szögek egyenlősége folytán $ABC \sphericalangle = ACP \sphericalangle = \beta$, ugyanis CP a k kör érintője, mert szerkesztés szerint merőleges az OC sugarra. Ezek szerint az $ABCD$ négyszög megfelel a feladat követelményeinek.

Mindig megszerkeszthető a k kör és $e \geq f$ folytán az AR húr, a k' kör, az a egyenes és erre a k' -vel való metszéspontjaiban állított merőlegesek. A feladatnak nincs megoldása, 1 vagy 2 megoldása van aszerint, hogy az a -ra állított merőlegesek k -ba eső szakaszai nem metszik AC -t, ill. csak az egyikük, vagy mind a kettő metszi.

Megjegyzés. A k kör f hosszúságú, kívánt állású húrjainak végpontjait kimetszhetjük azokkal a k_1, k_2 körökkel is, amelyek k -nak f nagyságú eltolásával adódnak az e -vel ω szöget bezáró (és egymással ellentétes) irányban. $f \leq e$ miatt közös pont mindig van, és a húr megfelel, ha végpontjai AC két oldalán adódnak.

II. megoldás. Tovább is a fenti jelöléseket használjuk. Tükrözzük az AD oldal E felezőpontjára¹ B -t, O -t és k -t, legyen a kép B^*, O^*, k^* . Ekkor egyrészt $ABDB^*$ paralelogramma, $AB^* \# BD$, és $B^*AM \sphericalangle = BMA \sphericalangle = \omega$, váltószögek, mert E , és így B^* is AC -nek B -t nem tartalmazó partján van, M pedig az AC szakaszon. Másrészt D a k és k^* metszéspontja. Így a következő szerkesztéshez jutottunk.

AC -nek, O -nak és k -nak a fentiek szerinti megszerkesztése után felmérjük a $CAB^* \sphericalangle = \omega$ szöget, és új szárára az $AB^* = f$ szakaszt. AB^* mint húr fölé OC sugarú k^* kört szerkesztünk, ennek k -val való metszéspontja D , végül B^* tükörképe AD felezőpontjára nézve B .

A kapott $ABCD$ négyszögben $AC = e$, $BD = AB^* = f$ és $BMA \sphericalangle = MAB^* \sphericalangle = \omega$, továbbá k átmegy B -n, mert k és k^* , mint egyenlő sugarú körök, egymás tükörképei a közös AD húrjuk felezőpontjára nézve, tehát a feltétel alapján $ABC \sphericalangle = \beta$.

B^* egyértelműen szerkeszthető és D létrejön, mert k -nak és k^* -nak van közös pontja: A .

k^* helyett AB^* -ra való k^{**} tükörképét használva újabb megoldást kapunk. A megoldások megfelelnek, ha D az AC egyenes B^* -ot tartalmazó partján adódik, számuk legfeljebb 2.

¹ Az ábrán E pótlendő.