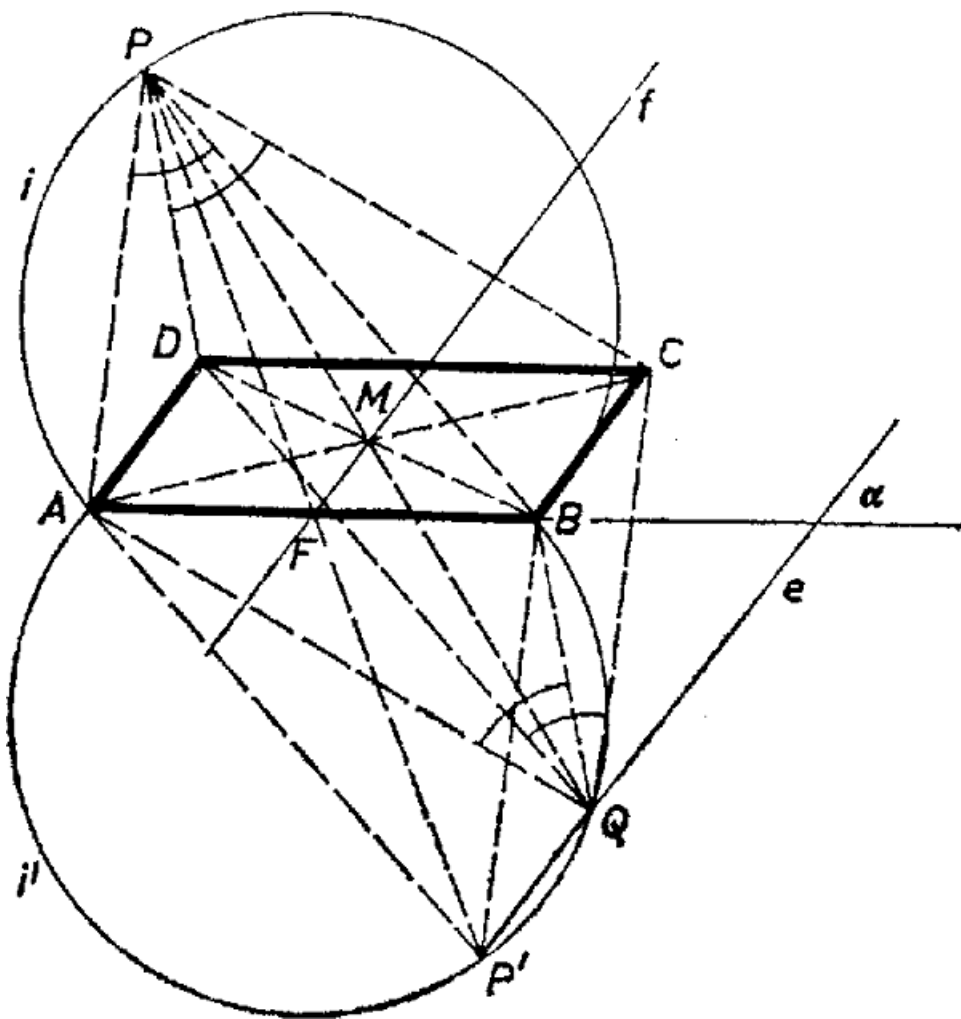


I. megoldás. Legyenek a keresett $ABCD$ paralelogramma adott csúcsai A és B . Mivel a paralelogramma egy szöge a többit meghatározza, ezért feltehetjük, hogy az adott szög a $DAB \angle = \alpha$. Végül jelöljük a sík adott pontját – amelyből az AB és CD szakasz egyenlő szög alatt látszik – P -vel.



1. ábra

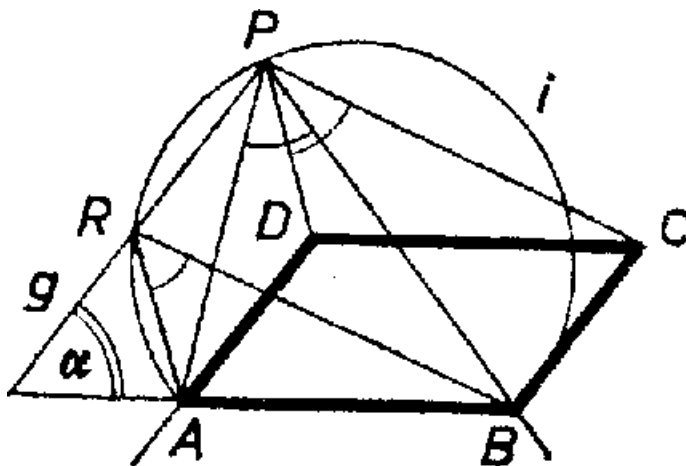
Ha meg tudjuk szerkeszteni a paralelogramma átlóinak M metszéspontját, ezzel a feladatot megoldottuk, mert C az A -nak és D a B -nek M -re vonatkozó tükörképe (1. ábra). Mivel a paralelogramma M -re szimmetrikus, azért P -nek M -re vonatkozó Q tükörképéből is ugyanakkora szög alatt látszik mind az AB , mind a CD szakasz, mint P -ből. A tükrözésből következik, hogy M , a PQ szakasz felezőpontja, ezért elegendő a Q pont megszerkesztése. Q rajta van az AB szakasz fölé rajzolt azon két látóörív valamelyikén, amelyek pontjaiból az AB szakasz ugyanakkora szög alatt látszik, mint P -ből, hiszen Q -ból és P -ből az AB szakasz egyenlő szögben látszik.

Másrészt M -en átmennek a paralelogramma középvonalai. Az AD oldallal párhuzamos f középvonalát azonnal meghúzhatjuk, ez átmegy az AB szakasz F felezőpontján és α szöget zár be az AB egyenessel. Mivel a PQ szakasz felezőpontja rajta van f -en, azért Q -nak rajta kell lennie azon az f -fel párhuzamos e egyenesen, amely a P -nek az f pontjaira vonatkozó tükörképeiből áll. Így Q , mint a fenti két látóörív és az e egyenes közös pontja, megszerkeszthető.

A szerkesztés a következő: vesszük az ABP háromszög körülírt körének P -t tartalmazó $AB = i$ ívét; ez nyilvánvalóan a szóban forgó látóörívek egyike, a másika pedig ennek i' tükörképe F -re. Kimetsszük i' -n P -nek F -re vonatkozó P' tükörképét. P' -n és F -en át megszerkesztjük az AB -vel α szöget bezáró e , illetőleg f egyenest. Az e és az i, i' pár valamelyik (de P' -től különböző) Q közös pontját P -vel összekötő egyenes f -ből kimetszi M -et, végül A és B tükörképe M -re C , ill. D .

Az $ABCD$ négyszög megfelel a követelményeknek, mert az utolsó két tükrözés miatt paralelogramma, oldalai párhuzamosak FM -mel, tehát $DAB \angle = \alpha$, végül $CPD \angle = AQB \angle = APB \angle$, mert Q a P tükörképe M -re. A feladat diszkusszióját a III. megoldás után tárgyaljuk.

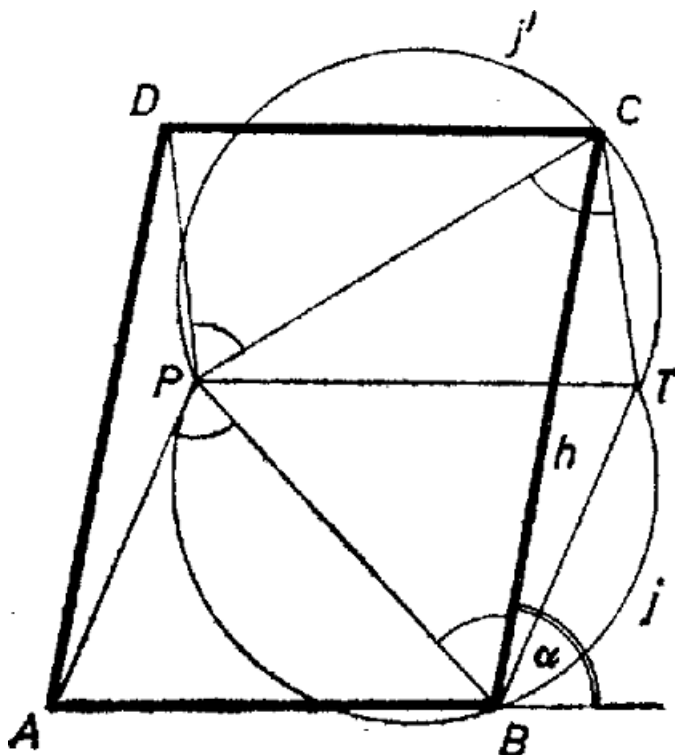
Megjegyzés. f és M megszerkesztése el is maradhat. D paralelogrammává egészíti ki a PBQ háromszöget, C pedig a BAD háromszöget. – Így természetesen a bizonyítás is módosul: P' szerkesztése szerint $PAP'B$ paralelogramma, D (új) szerkesztése szerint $PBQD$ szintén, így az APD és $P'BQ$ háromszögben az AP és $P'B$ továbbá PD és BQ oldalak egy irányban párhuzamosak és egyenlőek, tehát az AD és $P'Q$ oldalak is, vagyis $DA \parallel e$, $DAB \angle = \alpha$.



II. megoldás. Toljuk el a PCD háromszöget úgy, hogy D csúcsa A -ba kerüljön (2. ábra). Ezáltal C a B -be kerül, P pedig egy olyan R pontba, melyből az AB szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint P -ből CD , vagyis mint P -ből AB . R tehát rajta van az előbbi két látókörív valamelyikén.

Másrészt az eltolás közben P az AD -vel párhuzamosan mozgott, így R rajta van a P -n átmenő és az AB egyenesessel α szöget bezáró g egyenesen. Ezek alapján R , mint g és a két látókörív közös pontja, megszerkeszthető, D pedig paralelogrammává egészíti ki az ARP háromszöget.

III. megoldás. Mindkét fenti megoldásban első lépésként két körív és egy egyenes metszéspontját kerestük meg, ebből kaptuk meg a paralelogramma csúcsait. Az I. megoldásban a metszéspontból előbb a paralelogramma középpontját határoztuk meg, a II. megoldásban a metszéspontból már közvetlenül kaptuk az egyik csúcst. Most olyan megoldást adunk, melyben a körívek és egy egyenes metszéspontja mindjárt maga az egyik csúc.



Egészítsük ki a BAP háromszöget a T ponttal a $BAPT$ paralelogrammává (3. ábra). Ekkor a $CDPT$ négyszög is paralelogramma, PA és TB , valamint PD és TC is párhuzamosak, ezért és a feltevés miatt

$$PCT_{\triangleleft} = CPD_{\triangleleft} = BPA_{\triangleleft} = PBT_{\triangleleft},$$

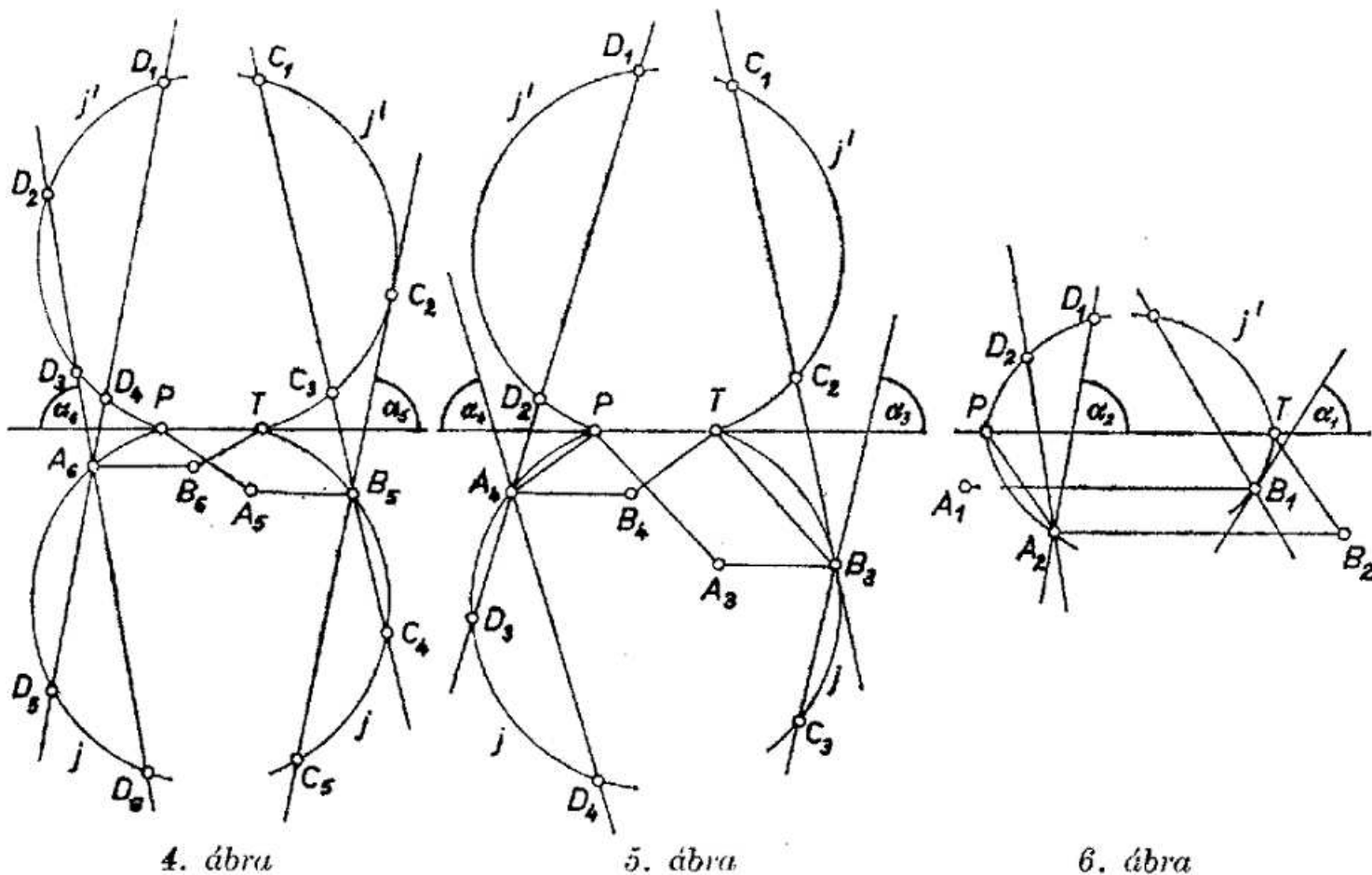
vagyis C -ből a PT szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint B -ből. C tehát rajta van azon két j, j' látóörív valamelyikén, melyeknek pontjaiból a PT szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint B -ből. Másrészt C rajta van a B -n átmenő, AB -vel α szöget bezáró h egyenesen is ($CBA \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$), tehát C e két mértani hely közös pontja.

Kimutatjuk, hogy e közös pontok bármelyike megfelel C -ként – kivéve természetesen B -t. Mivel C rajta van h -n, azért a paralelogramma szögei megfelelők, továbbá $PD \parallel TC$. Másrészt C rajta van j és j' valamelyikén; ezért $DPC \sphericalangle = PCT \sphericalangle = PBT \sphericalangle = BPA \sphericalangle$, mint állítottuk.

Ezek alapján a szerkesztés a következő: párhuzamost húzunk P -n át AB -vel és B -n át AP -vel, e két egyenes metszéspontja T . Megrajzoljuk a BPT háromszög köré írt kör B -t tartalmazó $PT = j$ ívét és ennek PT -re, való j' tükörképét. Ezután B -n át meghúzzuk azt a h egyenest, amely AB -vel α szöget zár be. Ekkor h -nak j -vel, j' -vel való, B -tól különböző közös pontja (e közös pontok bármelyike) adja a paralelogramma C csúcsát.

h -nak mindkét ívvel legfeljebb két közös pontja van, és j -vel mindenesetre közös pontja B , azért a megoldások száma legfeljebb 3. Csak abban az esetben nem kapunk megoldást, ha B a h -nak j -vel egyetlen közös pontja, és itt érintkeznek, j' -vel pedig nincs közös pontja. (*Ha ugyanis h a j -t B -ben metszi, akkor van pontja a j , j' ívekkel határolt idom belsejében, így a kilépési pont megfelel C -ként.)

Ha elejtjük azt az előírást, hogy az adott szög a paralelogramma A -nál levő szöge legyen, akkor h -nak az AB egyenesre való h^* tükörképe, is tekintetbe veendő. Ekkor a megoldások száma 6, 5, 4, 3, 2 vagy 1 (a 4–6. ábrákon példákat látunk ilyen helyzetekre, 1 megoldás van az 1–3. ábrák helyzeteiben is). Kimutatjuk ugyanis, hogy így minden esetben létezik legalább 1 megoldás. (A 4–6. ábrák 2–2 felén csak P és T közös.)



Elég az olyan helyzeteivel foglalkoznunk h^* -nak, amelyekben fentebb h nem adott megoldást. Ekkor h^* – amennyiben különböző a h -tól – nem érinti, hanem metszi j -t B -ben és a fenti (*) megjegyzés szerint megoldást szolgáltat. Ha pedig h^* egybeesik h -val, akkor $\alpha = 90^\circ$ (mert $\alpha = 0^\circ$ nyilvánvalóan nem jön szóba), így h merőleges PT -re, és mivel B -ben érinti j -t, azért a szimmetria miatt B -nek PT -re való tükörképében érinti j' -t, ez a közös pont megoldást ad.

Könnyű belátni, hogy j , j' az I. és II. megoldásban szerepelt i , i' körívpárból AP irányú és nagyságú eltolással áll elő, hogy ugyanez áll fenn h és az I. megoldásbeli e egyenes között, végül hogy a II. megoldásbeli g egyenes az e tükörképe F -re. Ezért a III. megoldásra adott diszkusszió a megfelelő változtatásokkal az I. és II. megoldásra is érvényes.