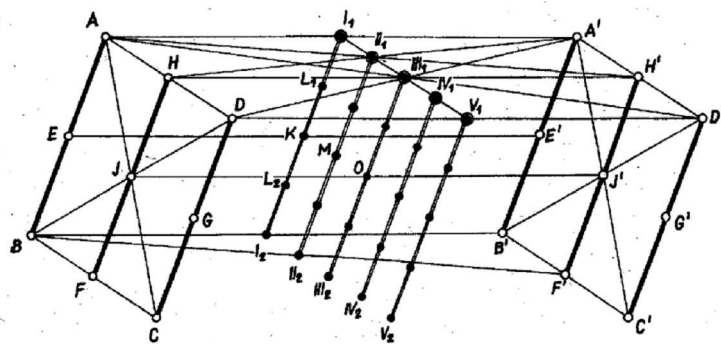


Jelölje az egyik (P) paralelogramma csúcsait A, B, C, D , az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontját rendre E, F, G, H , az átlók metszéspontját J . A másik (P') paralelogramma ebből eltolással kapható meg; legyenek a megfelelő megjelölt pontjai $A', B', C', D', E', F', G', H', J'$ (1. ábra).



1. ábra

Mind a két paralelogramma megjelölt pontjaiból egymástól függetlenül 9-féleképpen választhatunk ki 1 – 1 pontot, ezek $9 \cdot 9 = 81$ szakaszt határoznak meg. A különböző felezőpontok számának megállapításában P és P' megjelölt pontjaiból egyszerre mindig olyan 3-at-3-at veszünk figyelembe, melyek egy az AB oldallal párhuzamos oldal vagy középvonal pontjai.

Az A, E, B és A', E', B' pontok 9 szakaszt határoznak meg, ezek közül az $ABB'A'$ paralelogramma K középpontja felezi a két átlót és az EE' középvonalat, tehát 3 szakaszt; az $AEE'A'$ és $EBB'E'$ paralelogrammák középpontja L_1 , illetőleg L_2 a paralelogrammák átlóit, tehát 2 – 2 tekintetbe veendő szakaszt feleznek; az AA' és BB' oldalak felezőpontjai, I_1 , illetőleg I_2 csak ezt az 1 – 1 szakaszt. A felsorolt pontok az $ABB'A'$ paralelogramma I_1I_2 középvonalának különböző pontjai és azt 4 egyenlő szakaszra osztják.

Hasonlóan 5 különböző pontot kapunk az A, E, B és H', J', F' pontok közül egyet-egyet összekötő 9 szakasz felezőpontjaiból, az $ABF'H'$ paralelogramma II_1I_2 középvonalán. Ez az AH' szakasz felezőpontján megy át és párhuzamos AB -vel, így különbözik az előbbi 5 pontot tartalmazó egyenestől.

Ugyanez az öt. pont adódik a H, J, F és az A', E', B' pontok közül egyet-egyet összekötő szakaszok felezőpontjaiból, hiszen pl. az $AA'H'H$ paralelogrammában az AH' és HA' átlók felezőpontja egybeesik, hasonlóan a többi megfelelő szakaszpárok felezőpontjai is. így ez az 5 pont rendre 2, 4, 6, 4, 2 megrajzolandó szakaszt felez.

5 – 5 különböző pont adódik az alább felsorolt két-két ponthármas felezőpontjaiként is, egy-egy az AB -vel párhuzamos egyenesen:

$$\begin{aligned} \text{III. } A, E, B \text{ és } D', G', C', \quad \text{IV. } H, J, F \text{ és } D', G', C', \quad \text{V. } D, G, C, \text{ és } D'G'C'; \\ H, J, F \text{ és } H', J'F', \quad D, G, C \text{ és } H', J', F'; \\ D, G, C \text{ és } A', E', B'; \end{aligned}$$

és az egy oszlopban álló ponthármas-párok ugyanazt az 5 pontot adják, mert pl. az $ADD'A'$ paralelogramma AD' és DA' átlóinak, valamint HH' középvonalának felezőpontja közös, a III_1 pont. A III_1 és III_2 pontokkal meghatározott szakaszon levő 5 pont rendre 3, 6, 9, 6, 3 figyelembe veendő szakaszt felez, a IV_1 -gyel és IV_2 -vel meghatározott szakasz pontjai 2, 4, 6, 4, 2 szakaszt, végül az V_1V_2 szakasz 5 pontja 1, 2, 3, 2, 1 pontot. A sorra vett 9 ponthármas-párban mind a 81 szakasz felezőpontját figyelembe vettük.

A III_1 -ből kiinduló pont-ötös különböző az I_1 -ből és II_1 -ből kiindulótól, hiszen a kezdőpontok az AA', AH', AD' szakaszok felezőpontjai, és összekötő egyenesük AD -vel párhuzamos. Ugyanígy IV_1 és V_1 is különbözik a többi kiindulópontoktól. Mindezek szerint $5 \cdot 5 = 25$ különböző felezőpontot kaptunk.

Megjegyzések. 1. Elindulhatunk a különböző felezőpontok megszámlálásában úgy is, hogy egy kiszemelt pontpár felezőpontjára tükrözzük P' -t- ami által a P' -ből kiszemelt pont képe mindenesetre a P -ből kiszemelt pontba esik -, és számba vesszük, hogy P' további megjelölt pontjainak tükrösképei közül hány esik egybe P -nek egy további megjelölt pontjával. így a JJ' szakasz O felezőpontjára való tükrözéssel P' mindegyik megjelölt pontjának képe P -nek egy megjelölt pontjába esik, az O pont 9 szakaszt felez, vagyis ugyanerre a fedésre vezet az A és C' , az E és G' , ..., a H és F' pontpárból való kiindulás. A JE', JF', JG' és JH' szakaszok felezőpontjai 6 – 6 szakaszt feleznek, mert pl. a JE' -nek M felezőpontjára való tükrözés $A'B'$ -t FH -ra, $H'F'$ -t BA -ra viszi, s így tovább. - Ezen az úton kissé nehézkes a már számba vett pontpárok nyilvántartása.

Egy további elindulási lehetőség: tekintsük az A -ból P' összes megjelölt pontjaiba vezető szakaszok felezőpontjait, ezek P' felére kicsinyített képét adják, vagyis 9 különböző pontot. P' -nek egymás után E -ből, B -ből, F -ből és C -ből való hasonló kicsinyítések egybeesések miatt csupán 3 – 3 új felezőpont adódik, a G -ből és D -ből való kicsinyítéskor már csak 2 – 2, végül a H -ből és J -ből való kicsinyítéskor már egy sem. Ennek lépésről lépésre való pontos átgondolása szintén hosszadalmasabb a fenténél.

2. Könnyű belátni, hogy megállapításaink akkor is érvényesek, ha a két eredeti paralelogramma két különböző síkban van.