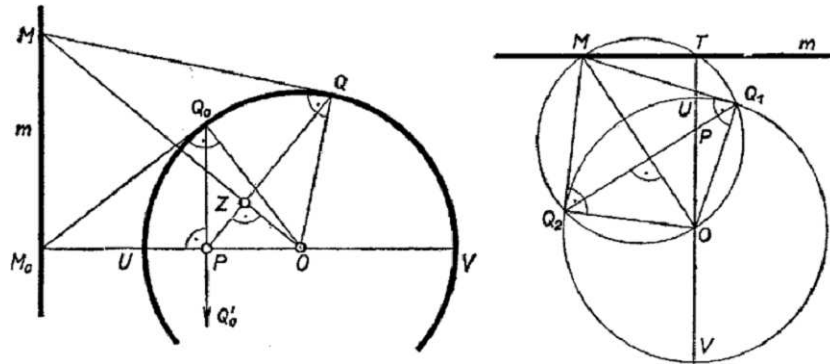


I. megoldás. Csak a kör O középpontjától különböző P pontok esetével kell foglalkoznunk, mert ha P egybeesik O -val, akkor Q semmilyen helyzetében nem jön létre az M metszéspont. Nem jön létre az M pont akkor sem, ha P különbözik O -tól, de Q a körből OP -vel kimetszett UV átmérő bármelyik végpontjában van.

Megszerkesztve M -et Q néhány helyzetéhez, a kapott pontok egy egyenesbe esnek, amely merőleges OP -re. Megmutatjuk, hogy a mértani hely valóban egyenes.



A mértani helynek van pontja az OP egyenesen. Akkor kapjuk ezt, amikor az O -n át PQ -ra állított merőleges maga OP , vagyis amikor PQ merőleges OP -re, más szóval Q a kör P -n átmenő, OP -re merőleges $Q_0Q'_0$ húrjának valamelyik végpontjában van. Legyen a Q_0 -hoz és Q'_0 -hez tartozó pont M_0 . Ekkor az OQ_0M_0 és OPQ_0 derékszögű háromszögek hasonlóak, mert O -nál levő szögük közös, így

$$M_0O : Q_0O = Q_0O : PO, \quad M_0O \cdot PO = Q_0O^2.$$

(2)

M_0 az OP félegyenesen van.

Legyen a körnek egy az U, V, Q_0, Q'_0 pontoktól különböző pontja Q , és messe OM a PQ egyenest Z -ben. Az OQM és OZQ háromszögekből az előbbiekhöz hasonlóan, majd felhasználva (2)-t

$$MO \cdot ZO = QO^2 = Q_0O^2 = M_0O \cdot PO, \quad \text{tehát} \\ MO : M_0O = PO : ZO.$$

A két egyenlő arány tagjai az MM_0O és PZO háromszögek O -ból kiinduló oldalai. E háromszögek O -nál levő szöge közös, így hasonlóak, ezért $MM_0O \sphericalangle = PZO \sphericalangle = 90^\circ$. Ezzel beláttuk, hogy M valóban mindig az M_0 -ban OM_0 -ra, vagyis OP -re merőlegesen álló m egyenesen van.

m minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez. Láttuk ugyanis, hogy M_0 a kört befutó pont Q_0 és Q'_0 helyzeteihez tartozik hozzá. Legyen m -nek egy az M_0 -tól különböző pontja M^* , és az M^* -ból a körhöz húzott egyik érintő érintési pontja Q^* . Ez csak M^* -ot szolgáltathatja, mert U -tól és V -tól különbözik, m -en levő pontot szolgáltat, de a Q^* -ban húzott érintő egyetlen közös pontja m -mel M^* , tehát M^* valóban hozzátartozik a mértani helyhez.

Mindezek szerint a keresett mértani hely az OP félegyenesre a (2)-nek eleget tevő M_0 pontjában állított merőleges.

II. megoldás. P -n át tetszés szerinti, de O -n át nem menő egyenest húzva, ennek a körrel való Q_1, Q_2 metszéspontjaihoz közös M pont tartozik. Ugyanis M -mel a Q_1 -beli és Q_2 -beli érintők metszéspontját jelölve az MQ_1OQ_2 négyszög deltoid, mert O -ból kiinduló oldalai, valamint a végpontjaiknál levő szögek egyenlők, tehát MO átlója merőleges a Q_1Q_2 átlóra. Ez pedig azonos a PQ_1, PQ_2 egyenessel, tehát az előírás szerint Q_1 -hez és Q_2 -hez M tartozik hozzá.

A deltoid köré kör írható, mert a szemben fekvő Q_1, Q_2 csúcsainál levő szögek összege két derékszöggel egyenlő, így MO e körben átmérő. Messe ez a kör az OP egyenest másodszor T -ben, így Thalész tétele szerint az OTM szög derékszög.

Könnyű belátni, hogy T helyzete független a Q_1Q_2 egyenes megválasztásától. A deltoid köré írt körnek TO és Q_1Q_2 a P -n átmenő húrjai, így

$$PT \cdot PO = PQ_1 \cdot PQ_2.$$

Hasonlóan az adott körből

$$PQ_1 \cdot PQ_2 = PU \cdot PV,$$

ahol U, V ismét az adott körnek PO -n levő pontjai, így

$$PT \cdot PO = PU \cdot PV.$$

Itt PO , PU és PV állandó, tehát PT is állandó, amint állítottuk.

Ezek szerint M mindig az OP egyenesre az állandó T pontban állított m merőlegesen van.

Eredményünk alapján m az M egyetlen helyzetéből megszerkeszthető. Ha pl. a P -n át választott egyenes merőleges OP -re, akkor M az OP -n, tehát éppen T -ben adódik.

Az I. megoldáshoz hasonlóan látható be, hogy m minden pontja a mozgó pont egy helyzetéhez tartozik, m a keresett mértani hely.