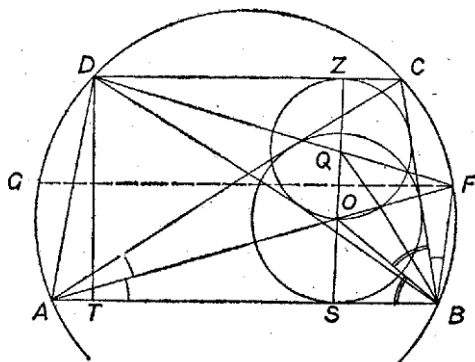


I. megoldás. Legyen az adott egyenlő szárú trapéz $ABCD$, ahol a csúcsokat úgy betűztük, hogy $AB \parallel CD$ és $AB \geq CD$ álljon. Jelöljük az ABC háromszögbe írt kör középpontját O -val, a BCD háromszögbe írtét Q -val, az előbbi kör érintési pontját AB -n S -sel, az utóbbit CD -n Z -vel. A feladat állítása igazolást nyer azzal, ha megmutatjuk, hogy SZ merőleges a párhuzamos oldalakra, hiszen O az AB -re S -ben emelt merőlegesen van, Q pedig a CD -re Z -ben állított merőlegesen. D vetületét AB -n T -vel jelölve azt mutatjuk meg, hogy $DTSZ$ téglalap. Ehhez elég megmutatni, hogy $DZ = TS$, hiszen ez a két oldal párhuzamos és merőleges DT -re.

A háromszög csúcsainak a beírt kör érintési pontjától való távolsága és az oldalak hossza közti ismert összefüggés szerint

$$AS = \frac{1}{2}(AB + AC - BC), \quad DZ = \frac{1}{2}(DC + DB - BC).$$

A T pont az AB szakaszon van (esetleg egybeesik A -val), így a TS szakasz, figyelembe véve, hogy az átlók egyenlők,



$$\begin{aligned} TS &= AS - AT = \\ &= \frac{1}{2}(AB + DB - BC) - \frac{1}{2}(AB - CD) = \\ &= \frac{1}{2}(DB + CD - BC) = DZ, \end{aligned}$$

$DTSZ$ tehát valóban téglalap. (Nem lehet, hogy O és Q egybeessenek, s így a rajtuk átmenő egyenes iránya határozatlan, mert akkor a körök is egybeesnének, hiszen mindkettő érinti BC -t; de pl. az ABC háromszögbe írt kör nem érintheti CD -t, mert CD -nek C az egyetlen közös pontja a háromszöggel, az pedig a körön kívül van.)

Megjegyzés. Hasonlóan lehet belátni, hogy a BCA és BOD háromszög külső érintő köreinek középpontjai – alkalmas páronként összekötve – ugyancsak az AB -re merőleges egyeneseket adnak.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használjuk. A trapéz köré kör írható. Legyen a kör A -t (és D -t) nem tartalmazó BC ívének felezőpontja F . Megmutatjuk, hogy az OFQ háromszög egyenlő szárú és OQ -ra merőleges szimmetriatengelye párhuzamos a trapéz párhuzamos oldalalaival. Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer.

Az állítás első része abból következik, hogy OFB és QFB egyenlő szárú háromszögek. AO és BO szögfelezők, és előbbi átmegy F -en. Így, felhasználva a külső szög és a kerületi szög tételét:

$$\begin{aligned} \angle FOB &= \angle FAB + \angle OBA = \angle FAC + \angle OBC = \\ &= \angle FBC + \angle CBO = \angle FBO. \end{aligned}$$

Hasonlóan látható a QFB háromszög egyenlő szárú volta is. A kettőből $OF = BF = QF$, tehát OFQ is egyenlő szárú háromszög. Szimmetriatengelye az OFQ és AFD felezője, átmegy a B -t nem tartalmazó AD ív G felezőpontján. Ez az F pont tükörképe a trapéz szimmetriatengelyére, így FG valóban párhuzamos a párhuzamos oldalakkal, OQ tehát merőleges rájuk.