

Az egyenlőtlenséget az átrendezett

$$(1a) \quad (2n)^n < (2n+1)^n - (2n-1)^n$$

alakban fogjuk bizonyítani. Rendezzük a jobb oldali hatványokat $2n$ hatványai szerint. Mind a két kifejezés $(a+b)^n$ alakú, ahol $a = 2n$, és b az egyik esetben 1 , a másik esetben -1 . Az n -edik hatvány egy n tényező szorzatot jelent. Ennek a tagokra bontott alakját úgy kapjuk, hogy minden lehető módon kivesszünk mindegyik tényezőtől egy-egy tagot, ezeket összeszorozzuk, és az összes ilyen szorzatokat összeadjuk.

Végezzük a fenti két hatvány tagokra bontását párhuzamosan úgy, hogy mindkettőben ugyanannyiadik tényezőkből választjuk a $2n$ -et és a többiből az első kéttagúnál a $+1$ -et, a másodiknál a -1 -et. Ha páros számú tényezőtől választjuk a $+1$ -et, ill. a -1 -et, akkor egyenlő tagok keletkeznek, és ezek a kivonáskor kiesnek (így az a két tag is, amelyhez mindegyik tényezőtől a $2n$ -et választjuk ki). Ha viszont páratlan számú tényezőtől választjuk a $+1$ -et, illetve a -1 -et, akkor egyenlő abszolút értékű tagok keletkeznek, de $(2n+1)^n$ -ből pozitív előjellel, $(2n-1)^n$ -ből negatív előjellel, a kivonásnál tehát ezek kétszerese adódik. Az összes ilyen tagok összege adja a jobb oldalt. Azt csökkentjük tehát, ha ezek közül a tagok közül csak egyeseket vesszünk tekintetbe.

Nézzük azokat a tagokat, amelyek úgy keletkeznek, hogy egy híján minden tényezőtől a $2n$ -et választjuk. Egyrészt ezek mindegyike $2(2n)^{n-1}$ -t ad a különbséghez, másrészt ilyen tag n -szer keletkezik, mert az a tényező, amelyikből nem a $2n$ -et (tehát az 1 -et, ill. a -1 -et) választottuk, vagy az első vagy a második stb. vagy az n -edik. Az (1a) jobb oldala tehát legalább $n \cdot 2 \cdot (2n)^{n-1} = (2n)^n$, és nagyobb ennél, ha fennáll az a lehetőség is, hogy három tényezőtől válasszuk a $+1$ -et, ill. a -1 -et, vagyis ha n legalább 3 . Ezzel az egyenlőtlenséget bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A követett gondolatmenet mutatja, hogy $(a+b)^n$ -t a és b hatványai szerint rendezve $a^k b^{n-k}$ alakú tagok keletkeznek, ahol $k = 0, 1, 2, \dots, n$ lehet, és a felírt tag együtthatója az a szám, ahányféleképpen n különböző dolog közül k -t ki lehet választani, ha a kiválasztás sorrendjére nem vagyunk tekintettel. (Ennyi módon választhatunk ki k tényezőt, hogy azokból a -t, a többiből b -t vegyük ki tényezőül.)

II. megoldás. Kézenfekvő (1a) jobb oldalának első tagjából levonni, a másodikhoz hozzáadni $(2n)^n$ -t, mivel a kifejezést $2n$ egy hatványával akarjuk összehasonlítani. Ekkor a fellépő különbségekben az alapok különbsége 1 , és ezért az egyenlő kitevőjű hatványok különbsége így alakítható át:

$$\begin{aligned} (2n+1)^n - (2n-1)^n &= (2n+1)^n - (2n)^n + (2n)^n - (2n-1)^n = \\ &= (2n+1)^{n-1} + (2n+1)^{n-2} \cdot (2n) + (2n+1)^{n-3} (2n)^2 + \dots + (2n+1)(2n)^{n-2} + \\ &+ (2n)^{n-1} + (2n)^{n-1} + (2n)^{n-2} \cdot (2n-1) + \dots + (2n)(2n-1)^{n-2} + \\ &+ (2n-1)^{n-1} = [(2n+1)^{n-1} + (2n-1)^{n-1}] + (2n)[(2n+1)^{n-2} + \\ &+ (2n-1)^{n-2}] + \dots + (2n)^{n-2}[(2n+1) + (2n-1)] + 2(2n)^{n-1}. \end{aligned}$$

A kifejezést n tagra bontottuk, így az egyenlőtlenség igazolást nyer, ha megmutatjuk, hogy a kifejezés növekszik, ha mindenütt, ahol előfordul, $2n+1$ -et és $2n-1$ -et egyidejűleg $(2n)$ -nel helyettesítjük. Az utolsó előtti tagnál ez nem okoz változást, a többinél viszont nagyobbítást jelent, ugyanis ha $l > 1$,

$$\begin{aligned} (2n+1)^l + (2n-1)^l - 2(2n)^l &= (2n+1)^l - (2n)^l - [(2n)^l - (2n-1)^l] = \\ &= (2n+1)^{l-1} + (2n+1)^{l-2} \cdot (2n) + \dots + (2n+1)(2n)^{l-2} + (2n)^{l-1} - \\ &- [(2n)^{l-1} + (2n)^{l-2} \cdot (2n-1) + \dots + (2n)(2n-1)^{l-2} + (2n-1)^{l-1}] = \\ &= [(2n+1)^{l-1} - (2n-1)^{l-1}] + (2n)[(2n+1)^{l-2} - (2n-1)^{l-2}] + \dots + \\ &+ (2n)^{l-2} \cdot [(2n+1) - (2n-1)] > 0. \end{aligned}$$

Ezzel a feladat állítása igazolást nyert.

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség belátható az egyenlő kitevőjű hatványok különbségére vonatkozó azonosság ismételt alkalmazásával is:

$$\begin{aligned} (2n+1)^n - (2n-1)^n &= (2n+1)^n - (2n)^n + (2n)^n - (2n-1)^n = \\ &= [(2n+1)^{n-1} + (2n-1)^{n-1}] + (2n)[(2n+1)^{n-2} + (2n-1)^{n-2}] + \\ &+ \dots + (2n)^{n-2} \cdot [(2n+1) + (2n-1)] + 2(2n)^{n-1}. \end{aligned}$$

Itt az utolsó előtti tag egyenlő az utolsóval, a többi pedig nagyobb nála, mert ha $l > 1$,

$$\begin{aligned} (2n+1)^l + (2n-1)^l - 2(2n)^l &= (2n+1)^l - (2n)^l - [(2n)^l - (2n-1)^l] = \\ &= (2n+1)^{l-1} - (2n-1)^{l-1} + (2n)[(2n+1)^{l-2} - (2n-1)^{l-2}] + \dots + \\ &+ (2n)^{l-2} \cdot [(2n+1) - (2n-1)] > 0. \end{aligned}$$

Az n tag összege tehát nagyobb, mint $n \cdot 2(2n)^{n-1} = (2n)^n$.