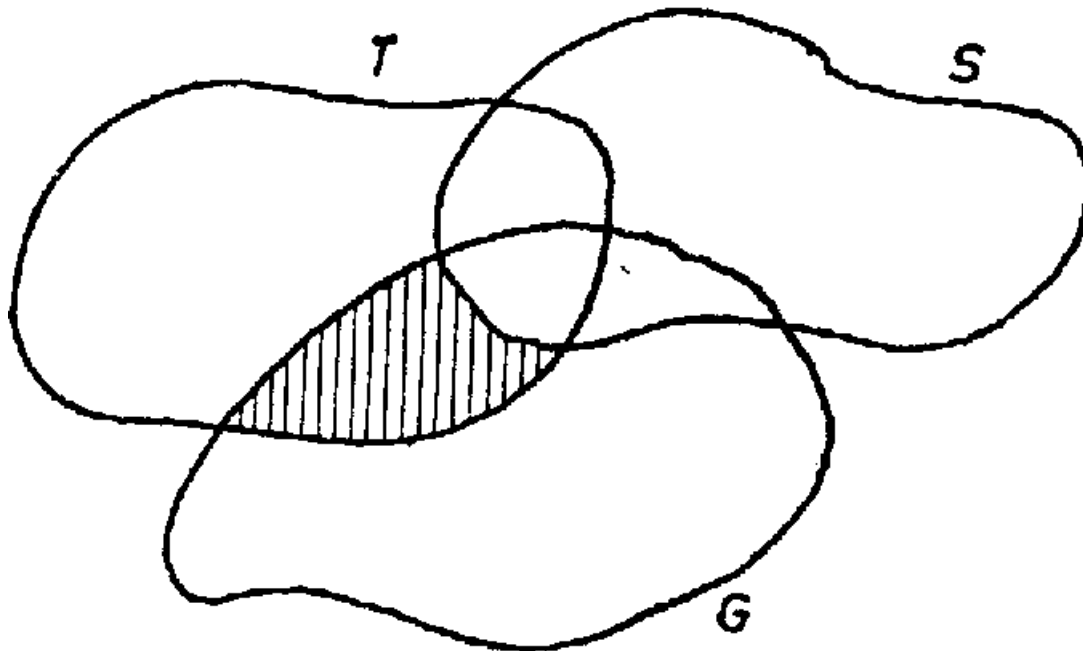


1. megoldás. Rajzoljunk a síkban egy T , egy S és egy G tartományt úgy, hogy legyen mindháromnak közös része, bármely kettő közös részének legyen olyan része, amelyik nem tartozik a harmadikhoz, és legyen mindegyiknek a másik kettőn kívül eső része is. Gondoljuk a televízió-tulajdonosokat a T -tartomány belsejének pontjaival jelölve, a szobafestőket az S pontjaival, azokat pedig, akiknek bérletük van a Gellért-fürdőbe, a G pontjaival. Ekkor a $b)$ állítás azt jelenti, hogy a G -be, de S -en kívül teendő pontok, ha vannak, nem kerülhetnek T -be sem, tehát az a tartomány, ami T -hez és G -hez is tartozik, de S -en kívül fekszik, egyetlen kijelölt pontot sem tartalmaz. Ezt az ábrán vonalkázással jelöltük.



Az $a)$ állítás szerint van pont a T -nek S -hez nem tartozó részében. Ez nem kerülhet a bevonalkázott részbe, tehát G -n is kívül van, vagyis olyan televízió-tulajdonost jelöl, akinek nincs bérlete a Gellért-fürdőbe. Eszerint a $c)$ állítás következik $a)$ -ból és $b)$ -ből.

II. megoldás. A $b)$ állítás így is fogalmazható : nincs olyan televízió-tulajdonos, aki nem szobafestő, de bérlete van a Gellért-fürdőbe. Eszerint egy olyan televízió-tulajdonosnak, akire az $a)$ állítás teljesül, nem lehet bérlete a Gellért-fürdőbe. Mivel az $a)$ állítás ilyen személy létezését mondja ki, így $a)$ -ból és $b)$ -ből következik a $c)$ állítás.

Surányi János

Megjegyzés. egy versenyzeladathoz

Egy versenyzeladat a következő volt: „Legyen az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság A_1 talppontja a BC szakasz belső pontja. Mindig kisebb-e az AB és AC oldalak különbsége, mint az A_1B és A_1C szakaszok különbsége? (Indokolás.)”

Láttuk,¹ hogy a válasz tagadó, ugyanis az egyenlő szárú háromszögekben mind a két különbség nulla.

\epsfbox{1965.5.200.1.eps}

Az alábbiakban néhány ezzel kapcsolatban felmerülő további kérdést vizsgálunk meg. Megmutatjuk először is, hogy más ellenpélda nincs is: ha A_1 belső pont és az A -ból kiinduló oldalakra $AB > AC$, akkor $AB - AC < A_1B - A_1C$.

Messe az A körül AC sugárral írt kör BC -t még a C' pontban, AB -t a C'' pontban. BC -nek A -hoz legközelebbi pontja A_1 , és C ettől különböző pont, tehát C' is különbözik C -től, annak az AA_1 tengelyre vett tükröke. C'' az AB szakasz belső pontja, vagyis B kívül van a körön, s így C' a BA_1 szakaszon van, tehát $A_1B - A_1C = A_1B - A_1C' = BC'$. Így a $BC'' < BC'$ egyenlőtlenséget kell belátnunk. Ez következik abból, hogy a $BC'C'' \triangle C''$ -nél levő szöge tompaszög, hiszen a C'' -nél levő külső szöge az $AC'C''$ egyenlő szárú háromszögnek az alapján levő szöge, tehát hegyesszög.

Nézzük még meg, mi a helyzet, ha A_1 pl. a BC szakasz C -n túli meghosszabbítására vagy C -be esik. Ekkor nyilvánvaló, hogy $AB > AC$; az A_1B és A_1C szakaszok különbsége BC , és ez megint kisebb, mint $AB - AC$, a háromszög-egyenlőtlenség szerint.

Ennek az esetnek a kizárása tehát nem volt lényeges, viszont azt célozta, hogy érdektelen esetek taglalása ne vonja el a figyelmet a lényegről: ellenpélda kereséséről.

¹Lásd Scharnitzky Viktor: Az 1965. évi Arany Dániel tanulmányversenyek I. fordulóján kitűzött feladatok megoldása (kezdők versenye), K.M.L. 31 (1965) 193-196. o.

Megjegyzés egy 1965. évi versenyfeladathoz

Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulójának 2. feladata így szólt:

A hegyesszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az egyik oldalon, egy-egy csúcsa a további oldalakon van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet tartalmazza a háromszög beírt körének középpontját.

A közölt megoldások² szerint a négyzet e pontot mindig belsejében tartalmazza, továbbá elég a négyzet és a háromszög közös oldalegyenesén fekvő csúcsokról kikötni, hogy hegyesszögűek legyenek.

Pelikán József versenydolgozatában felvetette azt a kérdést, hogy rögzítve a négyzetet és minden lehetséges módon köréírva hegyesszögű háromszögeket, ezek beírt köreinek középpontjai kerülhetnek-e a négyzet oldalaihoz tetszés szerint közel, vagy van olyan $\lambda > 0$, hogy ha a négyzet oldala t , akkor a körülírt háromszögek beírt köreinek középpontjai mindig legalább λt távolságra esnek a négyzet oldalaitól. Az alábbiakban meghatározzuk azon pontok mértani helyét a négyzetben, amelyek beírt körközepontok lehetnek, és látni fogjuk, hogy ezek nem kerülhetnek tetszés szerint közel az oldalakhoz.

Legyen $DEFG$ a négyzet, ABC egy körülírt háromszöge, legyenek a B, D, E, C pontok ebben a sorrendben egy egyenesen, s legyen F , ill. G az AC , ill. AB szakaszon. Legyen az ABC háromszög beírt köre k , középpontja O .

I. Egyelőre nem kötjük ki, hogy a BAC szög hegyesszög legyen.

a) A k körnek metszenie kell az FG szakaszt; különben ugyanis átmérője legfeljebb DE lenne, ezért az EF, GD szakaszok közül legalább az egyiket, mondjuk EF -et nem metszené, s így teljes egészében az EFG szögtartományban volna, s így nem érinthetné az AC egyenest. Legyen EF és GD felezőpontja K , ill. L , akkor ezek szerint O a $KLGF$ téglalapba esik.

\epsfbox{1965.5.201.1.eps}

k nem tartalmazhatja belsejében a G pontot, mert G -ből érintő vonható hozzá. Így O legalább annyira van G -től, mint a DE egyenestől, tehát alatta van a G fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának. Hasonlóan O az F fókuszú, DE vezéregyenesű parabolának is alatta van, legyen e két parabola metszéspontja M . Ekkor O az (egy egyenes szakasz és két parabolaív által határolt) KLM idomba esik; a KL szakasz pontjai nem tartoznak hozzá e mértani helyhez.

b) Ennek a tartománynak minden pontja lehet körközepont. Valóban, legyen O ezen idom valamely pontja. Az O körül írt, DE -t érintő k kör nem tartalmazza F -et és G -t és metszi FG -t, így az F -ből, ill. G -ből k -hoz húzott, a négyzetet nem metsző érintők és DE egy olyan háromszöget határolnak, melynek a DE egyenesen levő csúcsaiban hegyesszögei vannak és melynek a k kör beírt köre, $DEFG$ beírt négyzete.

II. Kössük ki most még, hogy A -nál is hegyesszög van.

a) Az I.a) alatti megállapítások természetesen érvényben maradnak. Jelöljük $DEFG$ átlóinak metszéspontját P -vel. Megmutatjuk, hogy ekkor O csak a PFG háromszög belsejében lehet! Ebből következik, hogy ha az F fókuszú parabolának és a DF átlónak a négyzetbe eső metszéspontját Q -val, a G fókuszú paraboláét és EG -ét R -rel jelöljük, O a (két egyenesszakasz és két parabolaív által határolt) $PQMR$ idomba esik; a PQ, PR szakaszok pontjai nem tartoznak a mértani helyhez. Annak bizonyítását, hogy ezen idom minden pontja hozzátartozik a mértani helyhez, az olvasóra bízunk.

Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy k középpontja pl. a PDG háromszögbe esik. Ekkor k nem metszi az EF egyenest, és ezért a CA oldalt az FA szakaszon érinti. A G pontból két érintőt húzhatunk k -hoz; az ezek által lemetezett háromszögek legyenek ABC és A_1B_1C . Feltehetjük, hogy a jelölést úgy választottuk, hogy k az A_1G, GB szakaszokat érinti. Be fogjuk látni, hogy a B_1A_1C és BAC szögek tompaszögek. A B_1A_1C szög a GAA_1 háromszög külső szöge, s így nagyobb a BAC szögnél.

Nyilvánvalóan $BGO \angle A_1GO \angle$. Továbbá $DGO \angle - OGF \angle$, ezért $BGD \angle \geq FGA_1 \angle$. Legyen O vetülete FG -re T , és F tükröképe T -re F' , ez O elhelyezkedése miatt a négyzet oldalának meghosszabbításán fekszik. Messe az FA érintő OT -re vett tükröképe GA_1 -et A_2 -ben, akkor az FGA_1 szög a $GF'A_2$ háromszög külső szöge, és így $GF'A_2 \angle < FGA_1 \angle$. Továbbá nyilvánvalóan $GF'A_2 \angle = GFA \angle$. Ezek szerint $GFA \angle < FGA_1 \angle \leq BGD \angle$, és $GAF \angle = 180^\circ - AGF \angle - GFA \angle = 90^\circ + BGD \angle - GFA \angle > 90^\circ$, és még inkább $GA_1F \angle > 90^\circ$.

Ezzel ellentmondásra jutottunk azzal a feltevésünkkel, hogy az ABC háromszög hegyesszögű. Tehát O a PGF háromszög belsejébe esik, és így a mértani hely valóban a $PQMR$ idom belseje, hozzávéve a QM, MR parabolaíveket.

Ennek az idomnak a négyzet kerületéhez legközelebb eső pontja M , hiszen a négyzetet P -ből, mint középpontból úgy kicsinyítve, hogy M a kerületére essék, nyilván tartalmazni fogja a $PQMR$ idomot. Legyen DE és FG felezőpontja N_1 , ill. N_2 , a négyzet oldala t , akkor M nyilván az N_1N_2 egyenesre esik,

$$MN_1 = t - MN_2, \quad \text{és} \quad MN_1 = MF = \sqrt{MN_2^2 + \frac{t^2}{4}},$$

azaz $MN_2 = 3t/8$. Tehát *Pelikán* kérdésére a válasz az, hogy a beírt körök középpontjai nem kerülhetnek $3t/8$ -nál közelebb a négyzet kerületéhez, és ez a korlát nem javítható.

Egyébként az is látható, hogy A -nál tompaszöget is megengedve a beírt kör középpontja tetszés szerinti közel eshet a négyzet kerületéhez.

²Lásd Surányi János: Az 1965. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulóján kitűzött feladatok megoldása, K.M.L. 31 (1965) 104-112. o., szorosabban 106-110. o.