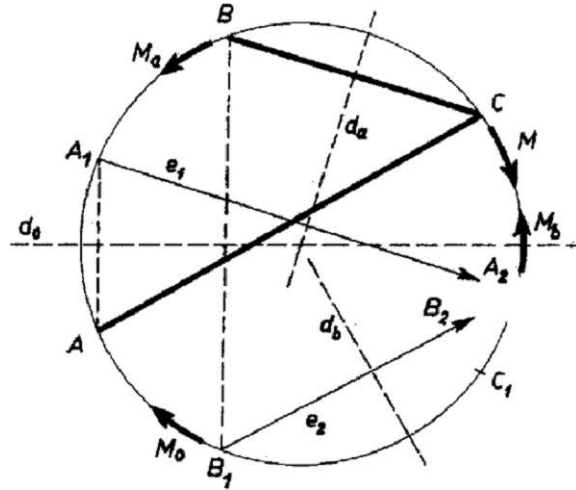


I. megoldás. Vázlatot készítve azt találjuk, hogy a kérdéses metszéspont a körön van. Könnyebb lesz ezt a többet mondó állítást bebizonyítani.



1. ábra

Mivel átmérőre tükröztünk, A_1 , B_1 és C_1 is a körön van. Azt fogjuk megmutatni, hogy az A_1 -en át BC -vel és a B_1 -en át AC -vel párhuzamosan húzott e_1 , illetőleg e_2 egyenes a körön metszi egymást. A harmadik egyenesre már könnyen átvihető lesz eredményünk.

Messe az e_1 egyenes a kört másodszor A_2 -ben, az e_2 egyenes B_2 -ben, így azt akarjuk belátni, hogy A_2 azonos B_2 -vel. Egyelőre feltesszük, hogy A_1 és A_2 különböző pontok, úgyszintén B_1 és B_2 is (1. ábra).

A BC és A_1A_2 szakaszok a kör párhuzamos húrjai, ezért végpontjaik egy szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) csúcsai, páronként egymás tükörképei a mindkét húrra merőlegesen álló d_a átmérőre mint tengelyre nézve. Így a CA_2 és BA_1 húrok egyenlők, mert egymás d_a -ra vonatkozó tükörképei. Hasonlóan egy húrtrapéz csúcsai az A , A_1 , B és B_1 pontok – az először végzett tükrözések miatt, mert AA_1 és BB_1 merőlegesek a felhasznált d_0 átmérőre –, valamint A , C , B_1 és B_2 is, a másodszorra szerkesztett párhuzamos miatt, itt a szimmetriatengely az AC -re merőleges d_b átmérő. Ezért

$$(1) \quad BA_1 = B_1A = B_2C \quad \text{és így} \quad CA_2 = B_2C$$

Eszerint A_2 és B_2 a körnek C -től egyenlő távolságra levő pontjai, tehát vagy egymás tükörképei a C -ből kiinduló átmérőre nézve, vagy egybeesnek. Csak azt kell már belátnunk, hogy az utóbbi eset áll fenn.

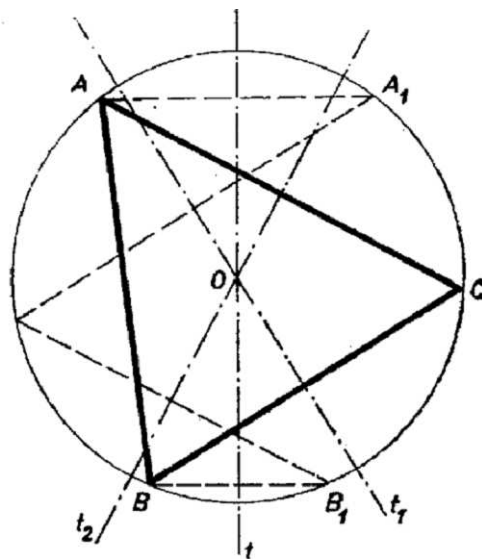
Mozgassunk egy M pontot a körön C -ből A_2 -be a köztük levő két körív valamelyikén, és tekintsük azt a mozgást, amit M -nek d_a -ra való M_a tükörképe végez, továbbá M_a -nak d_0 -ra való M_0 tükörképe, végül amit M_0 -nak d_b -re való M_b tükörképe végez. Az (1) alatti egyenlő húrok mindegyikének végpontjai a kört úgy osztják két-két ívre, hogy a részívek páronként egyenlők, és az M , M_a , M_0 , M_b pontok az egyenlő hosszú íveket írják le. A pontok mozgása mindig a kör középpontja körüli forgás, amelynek iránya az egymás utáni párokban a tükrözés miatt ellentétes. Így M és M_0 forgási iránya megegyező, mert mindegyik ellentétes irányú M_a forgásával, és hasonlóan M_b iránya is ellentétes M -ével. Ezért az M és M_b által befutott CA_2 és B_2C ívek ellentétes irányúak, az utóbbinak a végpontja viszont azonos az előbbinek a kezdőpontjával, ezért a B_2 kezdőpont is azonos az A_2 végponttal. Ezt akartuk belátni.

Akkor is érvényes (1), valamint meg gondolásunk záró része is, ha e_1 érinti a kört. Ekkor ugyanis A_2 helyén csak maga A_1 vehető, másrészt az A_1 -ből kiinduló átmérő merőleges BC -re, az A_1BC háromszög egyenlő szárú, és így $CA_2 = CA_1 = BA_1$. Hasonlóan okoskodunk, ha e_2 érinti a kört. Ezzel az első két párhuzamosra vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

Meg gondolásunkban az A , B , C ; A_1 , B_1 ; A_2 , B_2 pontok szerepét rendre a B , C , A , B_1 , C_1 , B_2 , C_2 pontoknak adva át, úgyszintén e_1 , e_2 , d_a , d_b , M_a , M_b szerepét rendre e_2 , e_3 , d_b , d_c , M_b , M_c -nek – ahol C_2 -t, e_3 -at, d_c -t és M_c -t a fentiekhez hasonlóan értelmezzük –, azt kapjuk, hogy e_2 és e_3 a körön metszik egymást, C_2 egybeesik B_2 -vel, tehát az eredeti meg gondolás szerint A_2 -vel is. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyzés. M és tükörképei mozgásának elképzelése tulajdonképpen mellőzhetővé tette az (1)-re vezető meg gondolást, hiszen megismételte azt, de többet mondott nála. Az ábra azonban csak nyugalmi helyzetet mutat, szemléletet előkészítette a későbbi mondottakat.

II. megoldás. Ismét azt bizonyítjuk, hogy a feladatban szereplő egyenesek a körön metszik egymást. Elég megmutatni, hogy az A_1 -en át BC -vel és B_1 -en át AC -vel húzott párhuzamosok a körön metszik egymást. A feltételeket leírhatjuk csupán a kör O középpontján átmenő tengelyekre való tükrözésekkel.



2. ábra

Jelöljük a körnek a feladat szövegében említett átmérőjét t -vel, a BC -re és a CA -ra merőleges átmérőt t_1 -gyel, ill. t_2 -vel (2. ábra). Ekkor A -ból a kérdéses körpontba úgy juthatunk, hogy A -t tükrözzük t -re, majd a tükörkép-pontot (A_1 -et) t_1 -re; hasonlóan B -ből a megfelelő metszéspontba a t -re, majd t_2 -re való tükrözéssel juthatunk. Megfordítva, a kétszeri tükrözéssel kapott pontból B -be a t_2 -re, majd t -re való tükrözéssel jutunk – és csak ebből a pontból, hiszen B_1 az egyetlen pont, amelyet t -re tükrözve B -t kapjuk, és olyan pont is egyetlenegy van, amelynek t_2 -re vonatkozó tükörképe B_1 , ugyanis B_1 -nek a t_2 -re vonatkozó tükörképe. Így, ha állításunk igaz, akkor A -t sorra tükrözve t -re, t_1 -re, t_2 -re, majd újra t -re, B -be jutunk, de fordítva is, ha utolsó állításunk igaz, akkor A -t t -re, majd t_1 -re tükrözve ugyanazt a pontot kapjuk, mint ha B -t tükrözzük t -re, majd t_2 -re.

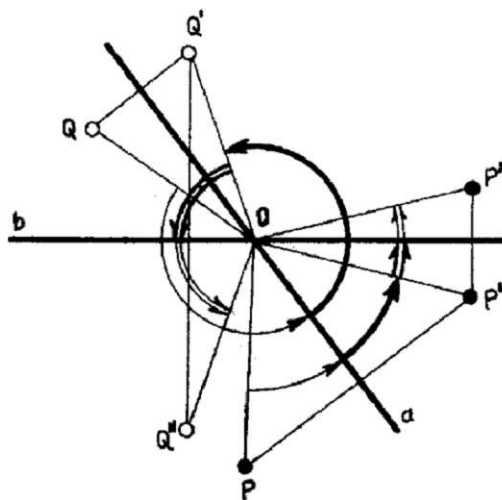
Elég tehát azt megmutatni, hogy A a fent említett négy tükrözéssel B -be megy át.

Ehhez megmutatjuk, hogy két egymást metsző tengelyre történő, egymás utáni tükrözés eredménye ugyanaz, mint ha metszéspontjuk körül egy kétszer akkora forgatást végzünk, mint ami az első tükrözés tengelyét a másodikéba viszi át.

Ebből átfogalmazott állításunk helyessége következik, hiszen A -t a t , majd a t_1 tengelyre tükrözve az eredmény a kör O középpontja körül a t -t t_1 -be vivő forgás kétszeresével való elforgatással helyettesíthető. Az ez utáni tükrözés t_2 -re, majd t -re annak a forgatásnak a kétszeresével helyettesíthető, amely t_2 -t t -be viszi át. A két forgatást egymás után elvégezve a forgatások szögei összeadódnak, és ez a forgásszög-összeg független a forgatások sorrendjétől. Így a négy tükrözés együtt annak a forgatásnak a kétszeresét adja, amellyel t_2 , a t -be, majd innen t_1 -be forgatható. Az utoljára említett forgatás a t_2 -t t_1 -be vivő forgatás, vagy ennél 180° egy többszörösével nagyobb. Így kétszerese a t_2 -t t_1 -be vivő forgatás kétszeresétől csak 360° egy többszörösével különbözhet, azonban 360° egy többszörösével való forgatás minden pontot önmagába visz át.

A négy egymás utáni tükrözés eredménye tehát az O körül a t_2 -t t_1 -be vivő forgatás kétszerese, ez pedig A -t éppen B -be viszi át; ezt akartuk bizonyítani.

A két tükrözés összetételére vonatkozó állítást kell tehát még belátnunk. Legyen a két egymást metsző tükörtengely a és b , metszéspontjuk O .



3. ábra

Egy P pont a -ra vonatkozó tükörképét megkaphatjuk úgy is, hogy az OP szakaszt O körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban – ezt szokás pozitív forgásiránynak tekinteni – a -ig forgatjuk, majd innen ugyanekkora szöggel tovább, az OP' helyzetbe. Ekkor P' a P tükörképe a -ra (3. ábra). A P -t P' -be vivő forgás szöge függ P helyzetétől. P' -t a b -re vonatkozó P'' tükörképébe ismét átvihetjük úgy, hogy OP' -t pozitív irányban b -ig forgatjuk, majd innen még ugyanekkora szöggel továbbforgatva jutunk az OP'' szakaszhoz. Így végül OP -t annak a forgásnak a kétszeresével forgattuk el (a 3. ábra vastagabban jelölt ívei), amely a -t P' -n áthaladva b -be viszi át. Ez vagy az a -t pozitív irányban b -be vivő legkisebb forgás, vagy az annál 180° -kal nagyobb forgás kétszerese; eredménye tehát minden esetben ugyanaz, mint az a -t b -be vivő forgatás kétszereséé, mért a 360° -kal való továbbforgatás nem okoz változást. Ezzel segédtételünket, s így a feladat állítását is bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Itt nem kellett különválasztanunk azt az esetet, ha pl. az A_1 -en át BC -vel párhuzamosan húzott egyenes érinti a kört. Ekkor t_1 átmegegyezik A_1 -en, s így a rá való tükrözés A_1 -et helyben hagyja.

2. Meggondolásunkban felhasználtuk, hogy egy középpont körüli egymás utáni forgatások felcserélhetők, így segédtételünk értelmében egy ponton átmenő tengelyekre vonatkozó tükrözéspárok is felcserélhetők. (Tükrözések nem cserélhetők fel, hiszen a b -re, majd a -ra való tükrözés azt a forgást adja, ami az a -ra, majd b -re való tükrözéssel egyenértékű forgatást teljes körülforgássá egészíti ki.) Így a t -re, t_1 -re, t_2 -re, majd t -re vonatkozó tükrözés ugyanazt eredményezi, mint ha t_2 -re, t -re, újra t -re, majd t_1 -re tükrözünk. Azonban a t -re való kétszeri tükrözés minden pontot helyben hagy, tehát az eredmény ugyanaz, mint ha t_2 -re, majd t_1 -re tükrözünk. Lényegében ezt láttuk be a megoldás során geometriailag.

3. A bizonyítandó állítást tovább alakíthatjuk, megfigyelve, hogy B -t ismét t_1 -re, majd t_2 -re tükrözve C -be, majd A -ba jut, és B az egyetlen pont, aminek megvan ez a tulajdonsága. Elég tehát azt megmutatni, hogy A -t sorra a t , t_1 , t_2 , t , t_1 , t_2 tengelyekre tükrözve eredeti helyzetébe jut vissza. Ez azonnal látható, ha – előző megjegyzésünk értelmében – az első és második tükrözéspárt megcseréljük. Eszerint a hat tükrözés eredménye ugyanaz, mintha, A -t sorra a t_2 , t , t , t_1 , t_1 , t_2 tengelyekre tükrözzük. De a t -re és újra t -re való tükrözés helyben hagyást eredményez, úgyszintén a t_1 -re és ismét t_1 -re való tükrözés, tehát a hat tükrözés egymásutánja ugyanazt eredményezi, mint a t_2 -re, majd t_2 -re való tükrözés, vagyis a helyben hagyást.

4. Az előző átfogalmazás azt jelenti, hogy a t , t_1 , t_2 tengelyekre való tükrözések egymásutánja olyan transzformációt eredményez, amelyet kétszer egymásután alkalmazva minden pont eredeti helyzetébe kerül vissza. Valóban, a három tükrözés eredménye egyetlen tükrözéssel helyettesíthető. A t -re és t_1 -re való tükrözés ugyanis annak a forgatásnak a kétszeresével helyettesíthető, amelyik t -t pozitív irányban t_1 -be viszi át. Ugyanerre a forgatásra vezet azonban minden olyan O -n átmenő tengelypárra vonatkozó tükrözés is, amelyek elsőjét a másodikba ugyanakkora forgás viszi át, mint t -t t_1 -be. Legyen t^* az a tengely, amelyet t_2 -be ugyanaz a forgatás viszi át, mint t -t t_1 -be. Ekkor a t -re, t_1 -re, majd t_2 -re való tükrözés eredménye ugyanaz, mint a t^* -ra, t_2 -re, majd t_2 -re való tükrözésé, ezé pedig ugyanaz, mint a t^* -ra való tükrözésé. Ezzel állításunkat igazoltuk.