

I. megoldás. Az egyenletnek akkor van értelme, ha egyik tört nevezője sem nulla. Tegyük fel, hogy ez teljesül, azaz legyen $a \neq b$, $a \neq -b$, és x -nek csak a 0-tól különböző értékeit engedjük meg.

Gyűjtsük a bal oldalra az ismeretlent tartalmazó tagokat:

$$\frac{a+b}{x} - \frac{a-b}{x} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b},$$

majd hozzuk közös nevezőre a jobb oldalt is

$$(2) \quad \frac{2b}{x} = \frac{2b}{a^2 - b^2}.$$

A két egyenlő tört számlálója azonos. Ha ez nem nulla, akkor ebből következik, hogy a két nevező is egyenlő, vagyis

$$x = a^2 - b^2.$$

Csak azonos átalakításokat végeztünk, a kapott érték valóban gyöke az egyenletnek, mert feltevésünk miatt $x \neq 0$, és így az egyenlet x -nevezőjű tagjainak is van értelme.

Ha $b = 0$ (és így a feltevés szerint $a \neq 0$), akkor (2)-nek minden $x \neq 0$ szám eleget tesz, ugyanis (1) így alakul

$$(1a) \quad \frac{1}{a} + \frac{a}{x} = \frac{1}{a} + \frac{a}{x}$$

Ezek szerint $a \neq b \neq 0$ és $a \neq -b$ esetén az egyenlet egyetlen megoldása $x = a^2 - b^2$; $a \neq b = 0$ esetén pedig minden szám megoldása az egyenletnek, kivéve $x = 0$.

II. megoldás. Szorozzuk meg az egyenletet $(a+b)(a-b)x$ -szel:

$$(a-b)x + (a+b)^2(a-b) = (a+b)x + (a-b)^2(a+b).$$

Tagokra bontás, rendezés majd kiemelés után

$$(3) \quad 2b(x + b^2 - a^2) = 0.$$

Ez akkor áll fenn, ha legalább az egyik tényező nulla.

Ha $b \neq 0$, és a zárójelben levő kifejezés nulla, akkor

$$x = a^2 - b^2,$$

és ezt (1) két oldalába külön-külön behelyettesítve az

$$\frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{a^2 - b^2}, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{a-b} + \frac{a-b}{a^2 - b^2}$$

kifejezéseket kapjuk. Ha ennek a két kifejezésnek van értelme, azaz ha $a \neq b$ és $a \neq -b$, akkor értékük egyenlő, vagyis $x = a^2 - b^2$ gyöke az egyenletnek. Ha $a = b$ vagy $a = -b$, akkor nincs megoldása az egyenletnek.

Ha $b = 0$, akkor (3)-ban a és x bármely értéket felvehet, kivéve a nullát, mert ekkor – mint (1a) mutatja – az eredeti egyenletnek nincs értelme.