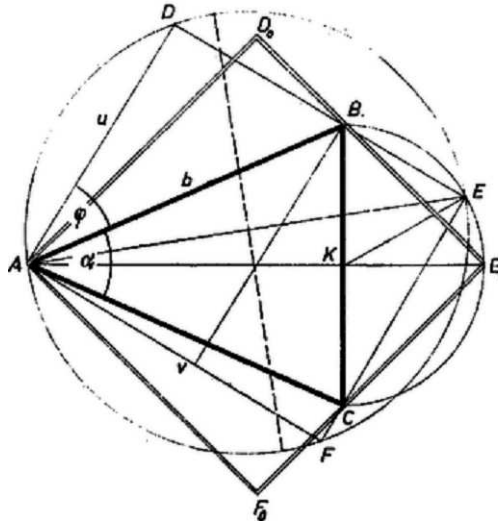


I. megoldás. Legyen egy az ABC háromszög köré írható, A csúcsú téglalapok közül $ADEF$ úgy, hogy a DE oldal B -n, EF pedig C -n halad át (5. ábra). Így BEC derékszög, ezért E a BC átmérő fölötti Thalész körön van, és pedig ennek azon a félkörén, amelyet a BC egyenes elválaszt A -tól. Jelöljük a kör középpontját (BC felezőpontját) K -val.



5. ábra

a) Megmutatjuk, hogy a keresett legnagyobb területű körülírt téglalapot akkor kapjuk, ha E a mondott félkörív E_0 felezőpontjában adódik. Ekkor a körülírt $AD_0E_0F_0 = N_0$ téglalap négyzet, mert az AE_0 egyenes merőleges BC -re, így felezi a $BE_0C \triangle = D_0E_0F_0$ szöget.

Ha $ADEF = T$ egy N_0 -tól különböző, az ABC háromszög köré írt téglalap, akkor átlója rövidebb, mint AE_0 , mert

$$AE < AK + KE = AK + KE_0 = AE_0$$

Így minden AE átlójú téglalap területe is kisebb, mint N_0 -é, ugyanis e téglalapok másik két csúcsa az AE átmérőjű körön van, ennek pedig AE -től legtávolabbi pontjai az AE -re merőleges átmérő végpontjai, vagyis az egyenlő átlójú téglalapok közül a négyzet területe a legnagyobb; de még az AE átlójú négyzet területe is kisebb, mint N_0 -é.

b) Az ABC háromszög keresett legkisebb területű körülírt téglalapját akkor kapjuk, ha a téglalap egyik oldala AB vagy AC (e két téglalap szimmetrikus az ABC háromszög tengelyére, így területeik egyenlők). Ekkor ugyanis a téglalap területe 2-szer akkora, mint az ABC háromszögé, és könnyű belátni, hogy körülírt téglalap területe ennél nem lehet kisebb. Ugyanis a B -n át EF -fel párhuzamosan húzott egyenes a körülírt téglalapot és az ABC háromszöget két részre vágja. Mindegyik rész-téglalapba be van írva egy rész-háromszög, amelyiknek egyik oldala a téglalap egy oldalán fekszik, és nem nagyobb ennél a téglalapoldalnál, az ehhez tartozó magasság a téglalap szomszédos oldala. Így a két rész-téglalap területe nem kisebb a rész-háromszögek területe 2-szeresénél, ugyanez áll tehát az ABC háromszögre és a köré írt téglalapra is. Épp kétszer akkora is csak akkor lehet a körülírt téglalap területe, mint a háromszögé, ha a téglalap egyik oldala egybeesik a háromszög egyik szárával.

II. megoldás. Használjuk ismét az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $AC = AB = b$, $BAC \angle = \alpha$, $AD = u$, $AF = v$, és $BAD \angle = \varphi$. Az utóbbi szög legkisebb értéke 0, ha ti. T egyik oldala AB ; legnagyobb értéke $90^\circ - \alpha$, ha ti. T egyik oldala AC :

$$(12) \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ - \alpha.$$

T területe, az ABD és ACF derékszögű háromszögek felhasználásával

$$t = uv = b \cos \varphi \cdot b \sin(\alpha + \varphi),$$

ugyanis $ACF \angle = CAD \angle = \alpha + \varphi$.

A két szögfüggvény szorzatát a $\sin z \cos w = [\sin(z+w) + \sin(z-w)]/2$ azonosság alkalmazásával összeggé alakítjuk:

$$(13) \quad t = \frac{b^2}{2} [\sin(\alpha + 2\varphi) + \sin \alpha].$$

A zárójelben csak az első tag változik, és (12)-t 2-vel szorozva, valamint mindenütt α -t hozzáadva a változó szögre

$$(14) \quad \alpha \leq +2\varphi = 180^\circ - \alpha.$$

A talált intervallum bal végpontja a feltevés szerint hegyesszög, jobb végpontja tompaszög, közrezárják 90° -ot. Itt veszi fel (13) első tagja a legnagyobb értékét, 1-et, tehát φ -nek a maximális t -t adó értékére

$$\alpha + 2\varphi = 90^\circ\text{-ből} \quad \frac{\alpha}{2} + \varphi = 45^\circ,$$

vagyis t_max akkor adódik, ha AD az ABC háromszög AE_0 tengelyével 45° -os szöget zár be. Ekkor a rá merőleges AF oldalegyenes is 45° -ot zár be AE_0 -lal, a körülírt téglalap tükrös AE_0 -ra, tehát négyzet.

Az $y = \sin x$ függvény a (14) intervallum $(\alpha, 90^\circ)$ részintervallumában nő, $(90^\circ, 180^\circ - \alpha)$ részintervallumában fogy, így (13) legkisebb értéke az a és $180^\circ - \alpha$ végpontokban felvett értékek kisebbike. A két végpontban $y = \sin x$ értéke egyenlő, tehát t -nek az

$$\begin{aligned} \alpha + 2\varphi &= \alpha, \quad \text{azaz} \quad \varphi = 0^\circ \quad \text{és az} \\ \alpha + 2\varphi &= 180^\circ - \alpha, \quad \text{azaz} \quad \varphi = 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

értékek esetén egyaránt minimuma van. Az első esetben AD azonos AB -vel (és D azonos B -vel), a másodikban AF azonos AC -vel (és F azonos C -vel).

Ezzel a legnagyobb és legkisebb területű körülírt téglalapok meghatározását befejeztük.