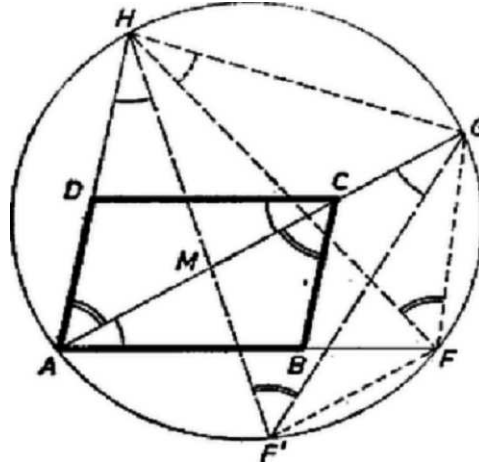


Legyen F tükörképe AG felező merőlegesére F' , az AG és $F'H$ egyenesek metszéspontja M .

I. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor F, G, H sorra az A -ból B, C, D felé induló félegyenesen van. Ekkor az AC egyenes elválasztja a B és D pontokat és velük együtt az F és H pontokat is. Így az AC egyenes A és G pontjaival kettévágott körnek különböző ívein van F és H , F' pedig ugyanazon az íven van, mint F , mert $FF' \parallel AG$. Ebből következik, hogy M az AG húr belső pontja.

Legyen F tükörképe AG felező merőlegesére F' , az AG és $F'H$ egyenesek metszéspontja M .

I. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor F, G, H sorra az A -ból B, C, D felé induló félegyenesen van. Ekkor az AC egyenes elválasztja a B és D pontokat és velük együtt az F és H pontokat is. Így az AC egyenes A és G pontjaival kettévágott körnek különböző ívein van F és H , F' pedig ugyanazon az íven van, mint F , mert $FF' \parallel AG$. Ebből következik, hogy M az AG húr belső pontja.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy az

$$(6) \quad \angle AHM, \angle ACD, \angle F'GM \text{ és } \angle CAB$$

háromszögek hasonlóak, megfelelő szögeik egyenlők. Ebből már könnyen fog következni (6). A háromszögek megfelelő szögeire egyrészt

$$\begin{aligned} \angle ACB &= \angle CAD = \angle HAM = \\ \angle HAG &= \angle HF'G = \angle MF'G; \end{aligned}$$

az utolsó előtti és az azt megelőző szög azonos íven nyugvó kerületi szögek. Másrészt

$$\begin{aligned} \angle AHM &= \angle AHF' = \angle AGF' = \\ \angle MGF' &= \angle FAG = \angle CAB = \\ &= \angle ACD. \end{aligned}$$

A második és harmadik szög azonos íven nyugvó kerületi szögek, a negyedik és ötödik pedig egymás tükörképe.

A (6) alatti első és második háromszög hasonlóságából, illetőleg a harmadik és negyedik hasonlóságából a következő arányok egyenlősége olvasható le:

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{GF'}{GM} = \frac{AC}{AB}.$$

Innen, figyelembe véve, hogy GF' és AF egymás tükörképei, tehát egyenlők, kapjuk, hogy

$$AD \cdot AH = AC \cdot AM, \quad AB \cdot AF = AC \cdot GM,$$

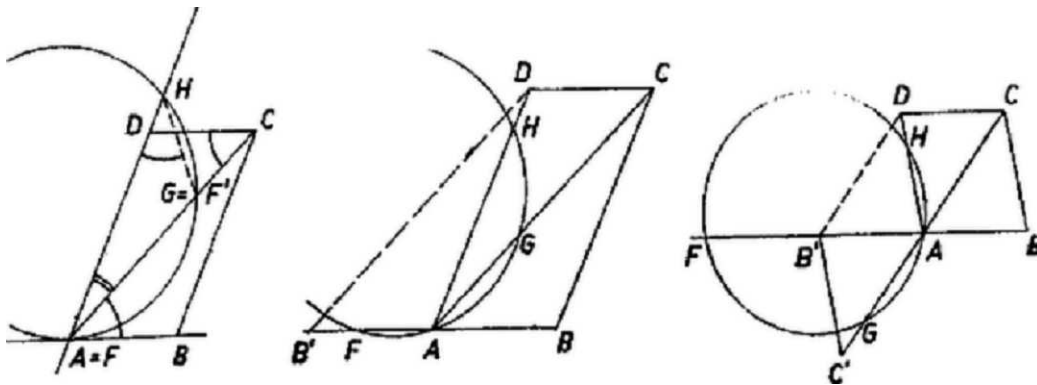
és a kettőt összeadva, mivel $AM + MG = AG$, adódik az (5) egyenlőség.

II. Megmutatjuk, hogy az (5) egyenlőség a kör minden helyzeténél érvényes marad, ha az A -tól B -vel, C -vel, ill. D -vel ellentétes irányban levő pontok távolságát negatívnak tekintjük. Ennek belátására forgassuk a kört az A pont körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban. A fenti bizonyítás nem alkalmazható már, ha a kör az AB oldalt érintő helyzetbe kerül (2. ábra). Ekkor $AF = 0$, másrészt az ACD és AHG háromszögek hasonlóak, mert egy szögük közös és

$$\angle ACD = \angle CAB = \angle GAB = \angle GHA.$$

Az utolsó egyenlőségben azonos íven nyugvó kerületi szögek szerepelnek. Így

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AH}{AG}, \quad AC \cdot AG = AD \cdot AH = AB \cdot AF + AD \cdot AH.$$



2., 3. és 4. ábra

Ha a kör továbbfordul, F az AB oldal A -n túli meghosszabbítására kerül (G és H még az AC és AD félegyeneseiken lesz, 3. ábra). Jelöljük B -nek A -ra vonatkozó tükörképét B' -vel, ekkor az $ACDB$ paralelogrammára érvényes az I. alatti bizonyítás és azt adja, hogy

$$AC \cdot AG + AB' \cdot AF = AD \cdot AH,$$

azaz

$$AC \cdot AG = AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH.$$

Így ha magán az AF jelölésen a szakasz negatív előjellel vett hosszát értjük ebben az esetben, akkor az eredeti összefüggés változatlanul helyes marad.

Ha a kör továbbfordulásával G is az AC átló A -n túli meghosszabbítására kerül, akkor vegyük a B és C pontok A -ra vonatkozó B' és C' tükörképét. Az $ADB'C'$ paralelogrammára ismét alkalmazható az I. rész bizonyítása, s így (4. ábra)

$$AC' \cdot AG + AD \cdot AH = AB' \cdot AF.$$

azaz

$$AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH = AC \cdot (-AG).$$

Ez azonban ismét azt jelenti, hogy a II. elején mondott előjelmegállapodással (5) érvényben marad.

Ha a kör az AD -t A -ban érintő helyzetben is túlfordul, akkor korábban már tekintetbe vett körhelyzetek A -ra vonatkozó tükörképeit kapjuk. Egy ilyen tükrözés előjelmegállapodásunk szerint AF , AG és AH előjelének egyidejű megváltozását, és így (5) minden tagjának ellenkező előjelűre változását okozza, az egyenlőség helyességét tehát nem változtatja meg. Ezzel a II. alatti állítást is igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Könnyen látható (1. ábra), hogy $ABC\Delta \sim FGH\Delta$. A megfelelő szakaszok arányát h -val jelölve $AB = h \cdot GH$, $AC = h \cdot FH$, $BC = AD = h \cdot FG$. Ezeket (5)-be beírva és h -val egyszerűsítve az $AFGH$ húrnégyszögre a következő összefüggést kapjuk:

$$AF \cdot GH + FG \cdot HA = AG \cdot FH,$$

vagyis *húrnégyszögben a szemközti oldalpárok szorzatainak az összege az átlók szorzatával egyenlő*. Ez az összefüggés PTOLEMAIOS tétele néven ismeretes. A fenti hasonlóság felhasználásával természetesen ebből a feladat állítása is könnyen következik. Ha viszont az I. alatti bizonyításban az ACD és CAB háromszög helyébe egyaránt az FHG háromszöget tesszük, akkor közvetlen bizonyítást kapunk PTOLEMAIOS tételére.

2. A versenyen a bíráló bizottság megelégedett az I. eset tárgyalásával.

Megmutatjuk, hogy az

$$(6) \quad \angle AHM, \angle ACD, \angle F'GM \text{ és } \angle CAB$$

háromszögek hasonlóak, megfelelő szögeik egyenlők. Ebből már könnyen fog következni (6). A háromszögek megfelelő szögeire egyrészt

$$\begin{aligned} \angle ACB &= \angle CAD = \angle HAM = \\ \angle HAG &= \angle HF'G = \angle MF'G; \end{aligned}$$

az utolsó előtti és az azt megelőző szög azonos íven nyugvó kerületi szögek. Másrészt

$$\begin{aligned} \angle AHM &= \angle AHF' = \angle AGF' = \\ \angle MGF' &= \angle FAG = \angle CAB = \\ &= \angle ACD. \end{aligned}$$

A második és harmadik szög azonos íven nyugvó kerületi szögek, a negyedik és ötödik pedig egymás tükörképe.

A (6) alatti első és második háromszög hasonlóságából, illetőleg a harmadik és negyedik hasonlóságából a következő arányok egyenlősége olvasható le:

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{GF'}{GM} = \frac{AC}{AB}.$$

Innen, figyelembe véve, hogy GF' és AF egymás tükörképei, tehát egyenlők, kapjuk, hogy

$$AD \cdot AH = AC \cdot AM, \quad AB \cdot AF = AC \cdot GM,$$

és a kettőt összeadva, mivel $AM + MG = AG$, adódik a (5) egyenlőség.

II. Megmutatjuk, hogy a (5) egyenlőség a kör minden helyzeténél érvényes marad, ha az A -tól B -vel, C -vel, ill. D -vel ellentétes irányban levő pontok távolságát negatívnak tekintjük. Ennek belátására forgassuk a kört az A pont körül pl. az óramutató járásával ellentétes irányban. A fenti bizonyítás nem alkalmazható már, ha a kör az AB oldalt érintő helyzetbe kerül (2. ábra). Ekkor $AF = 0$, másrészt az ACD és AHG háromszögek hasonlóak, mert egy szögük közös és

$$\angle ACD = \angle CAB = \angle GAB = \angle GHA.$$

Az utolsó egyenlőségben azonos íven nyugvó kerületi szögek szerepelnek. Így

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AH}{AG}, \quad AC \cdot AG = AD \cdot AH = AB \cdot AF + AD \cdot AH.$$

Ha a kör továbbfordul, F az AB oldal A -n túli meghosszabbítására kerül (G és H még az AC és AD félegyeneseken lesz, 3. ábra). Jelöljük B -nek A -ra vonatkozó tükörképét B' -vel, ekkor az $ACDB$ paralelogrammára érvényes az I. alatti bizonyítás és azt adja, hogy

$$AC \cdot AG + AB' \cdot AF = AD \cdot AH,$$

azaz

$$AC \cdot AG = AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH.$$

Így ha magán az AF jelölésen a szakasz negatív előjellel vett hosszát értjük ebben az esetben, akkor az eredeti összefüggés változatlanul helyes marad.

Ha a kör továbbfordulásával G is az AC átló A -n túli meghosszabbítására kerül, akkor vegyük a B és C pontok A -ra vonatkozó B és C tükörképét. Az $ADB'C'$ paralelogrammára ismét alkalmazható az I. rész bizonyítása, s így (4. ábra)

$$AC' \cdot AG + AD \cdot AH = AB' \cdot AF.$$

azaz

$$AB \cdot (-AF) + AD \cdot AH = AC \cdot (-AG).$$

Ez azonban ismét azt jelenti, hogy a II. elején mondott előjelmegállapodással (5) érvényben marad.

Ha a kör az AD -t A -ban érintő helyzeten is túlfordul, akkor korábban már tekintetbe vett körhelyzetek A -ra vonatkozó tükörképeit kapjuk. Egy ilyen tükrözés előjelmegállapodásunk szerint AF , AG és AH előjelének egyidejű megváltozását, és így (5) minden tagjának ellenkező előjelűre változását okozza, az egyenlőség helyességét tehát nem változtatja meg. Ezzel a II. alatti állítást is igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Könnyen látható (1. ábra), hogy $ABC\Delta \sim FGH\Delta$. A megfelelő szakaszok arányát h -val jelölve $AB = h \cdot GH$, $AC = h \cdot FH$, $BC = AD = h \cdot FG$. Ezeket (5)-be beírva és h -val egyszerűsítve az $AFGH$ húrnégyszögre a következő összefüggést kapjuk:

$$AF \cdot GH + FG \cdot HA = AG \cdot FH,$$

vagyis *húrnégyszögben a szemkötti oldalpárok szorzatainak az összege az átlók szorzatával egyenlő*. Ez az összefüggés PTOLEMAIOS tétele néven ismeretes. A fenti hasonlóság felhasználásával természetesen ebből a feladat állítása is könnyen következik. Ha viszont az I. alatti bizonyításban az ACD és CAB háromszög helyébe egyaránt az FHG háromszöget tesszük, akkor közvetlen bizonyítást kapunk PTOLEMAIOS tételére.

2. A versenyen a bíráló bizottság megelégedett az I. eset tárgyalásával.