

Alkalmas új ismeretlenek bevezetése útján feladatunkat egyszerűbb egyenletekből álló egyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza. Legyen pl.

$$x - y = u, \quad \text{és} \quad xy = v,$$

akkor egyenleteink így alakulnak át:

$$(1a) \quad x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy = u^2 + v = 2,$$

$$(2a) \quad x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = u^3 + 3uv = 4.$$

Az első egyenletből v kifejezését a másodikba helyettesítve:

$$u^3 + 3u(2 - u^2) = 4.$$

Rendezés és egyszerűsítés után a bal oldalt szorzattá alakíthatjuk:

$$u^3 - 3u + 2 = 0, \\ (u^3 - u) - 2(u - 1) = (u - 1)[u(u + 1) - 2] = (u - 1)(u^2 + u - 2).$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, tehát vagy $u - 1 = 0$, $u_1 = 1$, vagy $u^2 + u - 2 = 0$. Az utóbbi egyenlet két gyöke $u_2 = 1$ és $u_3 = -2$. Az u -khoz tartozó v -ket az (1a) egyenletből számíthatjuk ki,

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = -2.$$

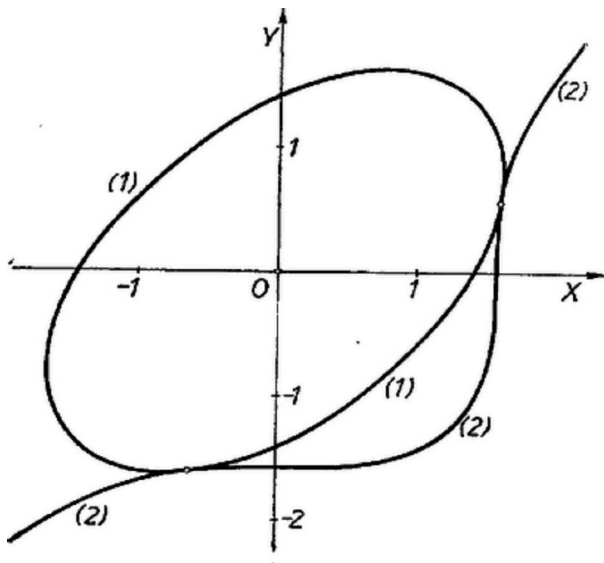
Az $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ gyökrendszerhez tartozó x és y értékeket az

$$u = x - y = 1, \quad v = xy = 1$$

egyenletekből kiszámítva

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}; \\ x_2 = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Az u_2 , v_2 gyökpárból nem kapunk új megoldást. Az $u_3 = -2$, $v_3 = -2$ gyökpárral adódó $x - y = -2$, $xy = -2$ egyenletrendszernek nincs valós megoldása.



Megjegyzés. Bizonyítás nélkül megemlíttük, hogy (1) képe a derékszögű koordináta-rendszerben olyan ellipszis, amelynek középpontja az origó, szimmetria tengelyei a koordináta-tengelyekkel 45° -os szöget zárnak be, nagy tengelye az I. és III. síknegyedekben halad, – (2) képe pedig egy ún. harmadrendű görbe. A mindkét egyenletet kielégítő x , y számpárokhoz tartozó pontok a görbéknek közös pontjai, ez esetben érintkezési pontok, bennük a két görbének közös az érintője is.