

A feladat olyan a, b, c számjegyek keresését kívánja, amelyekre

$$\frac{10a + b}{10c + a} = \frac{b}{c}.$$

Itt a és c nem 0, mert a bal oldal kétjegyű számok hányadosa, de b sem lehet 0, mert akkor a jobb oldal 0, tehát $a = 0$ kellene hogy legyen. A törteket eltávolítva

$$10ac + bc = 10bc + ab,$$

amit, a 10-zel szorzott tagokat egy oldalra rendezve, így írhatunk:

$$(1) \quad 10(a - b)c = (a - c)b.$$

Itt, ha $a - b$ nem 0, akkor vagy $a - c$ egyenlő 5-tel, vagy -5 -tel, vagy $b = 5$, mert mindkét tényező abszolút értéke kisebb 10-nél.

1) Ha $a - b = 0$, akkor $a - c = 0$, vagyis $a = b = c$, és ez nyilván minden pozitív a számjegyre megoldása a feladatnak.

smallskip 2) Ha $a - c = -5$, $a = c - 5$, akkor (1)-ből (-5 -tel egyszerűsítve)

$$2(b + 5 - c)c = b.$$

Ha $c \leq 5$, akkor a bal oldal nagyobb, mint b , ha pedig $c > 5$, akkor a bal oldal 10-nél nagyobb, tehát nem lehet egy számjeggyel egyenlő.

3) Ha $a - c = 5$, $a = c + 5$, akkor (1)-ből

$$2(c + 5 - b)c = b, \quad (2c + 1)b = 2c(c + 5).$$

Innen

$$b = c + 5 - \frac{c + 5}{2c + 1} = c + 5 - \frac{2c + 1 + 9}{2(2c + 1)} = c + \frac{9}{2} - \frac{9}{2(2c + 1)}.$$

Ez csak úgy adhat egész számot, ha $2c + 1$ osztója a 9-nek. Ez $c = 1, 4$ esetekben következik be. Ekkor b értéke 4, ill. 8, $a = c + 5$ értéke pedig 6, ill. 9. Az ezekkel felírt törtek

$$\frac{64}{16} = \frac{4}{1}, \quad \frac{98}{49} = \frac{8}{4}$$

valóban megfelelnek a feladat követelményeinek.

4) Végül, ha $b = 5$, (1)-ből

$$2(a - 5)c = a - c, \quad (2c - 1)a = 9c.$$

Ebből

$$a = \frac{9c}{2c - 1} = \frac{9}{2} + \frac{9}{2(2c - 1)}.$$

Ez akkor pozitív egész, ha $2c - 1$ a 9 pozitív osztója, tehát $c = 1, 2, 5$. Az a -ra adódó értékek 9, 6, 5. Ezek közül a harmadik értékhármast az 1) alatt szerepelt megoldások egyikét adja, a másik kettőhöz tartozó törtekre

$$\frac{95}{19} = \frac{5}{1}, \quad \frac{65}{26} = \frac{5}{2},$$

tehát ezek is megfelelnek a feladat követelményeinek; így 9 érdektelen megoldás mellett további 4 megoldása van a feladatnak.

Megjegyzések. Több versenyző a követelmény alapján kifejezte valamelyik számjegyet a másik kettővel, majd az utóbbiak minden lehetséges értékpárja mellett azt vizsgálta, lehet-e számjegy a kifejezés értéke. Látjuk, hogy a feladat kevesebb próbával is megoldható. Számosan egy megfelelő számjegyhármast megtalálása után abbahagyták a próbálgatást.