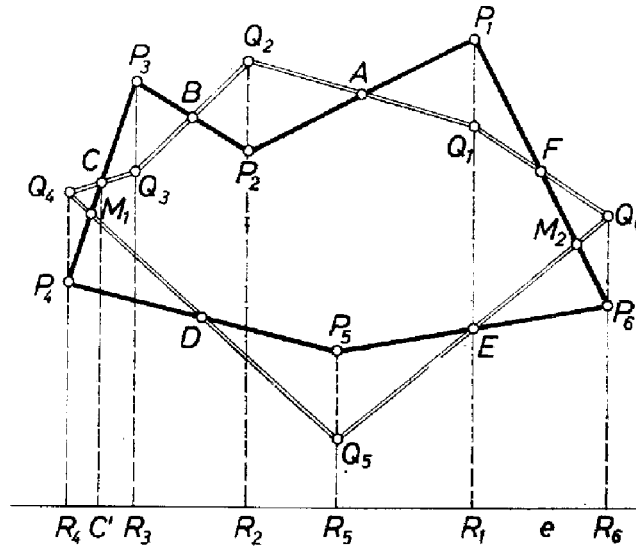


2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha két hatszög oldalainak felezőpontjai rendre megegyeznek, akkor a két hatszög területe egyenlő.

I. megoldás. Legyen a $P_1P_2P_3P_4P_5P_6 = P$ hatszög $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_6P_1$ oldalának felezőpontja rendre A, B, C, D, E, F , és tegyük fel, hogy rendre ugyanezen pontok felezik a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6 = Q$ hatszög egymás utáni $Q_1Q_2, Q_2Q_3, \dots, Q_6Q_1$ oldalát is. Azt kell bebizonyítanunk, hogy a P és Q hatszögek területe egyenlő.

Egyelőre feltesszük, hogy sem P , sem Q nem hurkolt idom és meggondolásainkat az 1. ábra esetéhez kapcsoljuk hozzá. A közös felezőpontokban a két hatszög egy-egy oldala metszi egymást, pl. A -ban a P_1P_2 és Q_1Q_2 oldalak. Ezért az egyik hatszög kerületén végighaladva mindegyik felezőpontban átlépjük a másik hatszög kerületét, vagy belépünk abba, vagy kilépünk belőle, – hacsaknem kivételesen P és Q egy-egy oldalegyenese egybeesik, és így egy szakaszon közös határukon haladunk. Ennélfogva Q területének is bizonyos részei P -n belül vannak, más részei P -n kívül és viszont. Pl. az AP_1Q_1 háromszög P -höz hozzátartozik, Q -hoz pedig kívülről csatlakozik, az AP_2Q_2 háromszög viszont Q -n belül, egyszersmind P -n kívül van. E két háromszög egybevágó, mert A -ból kiinduló oldalai páronként egyenlők és a köztük levő szögek csúcshölk, ezért területük is egyenlő. Így kapjuk a következő 6 egyenlőséget (a háromszögek területét ugyanúgy jelölve, ahogy magukat a háromszögeket szokás):

$$(7) \quad \begin{aligned} AP_1Q_1 &= AP_2Q_2, \\ BP_3Q_3 &= BP_2Q_2, \\ CP_3Q_3 &= CP_4Q_4, \\ DP_4Q_4 &= DP_5Q_5, \\ EP_6Q_6 &= EP_5Q_5, \\ FP_1Q_1 &= FP_6Q_6. \end{aligned}$$



1. ábra

A balról felsorolt háromszögek mind kívülről csatlakoznak Q -hoz, a jobboldaliak pedig P -hez. Ezért Q -hoz hozzávéve a bal oldali háromszögeket, az $AQ_2BP_3CQ_4$

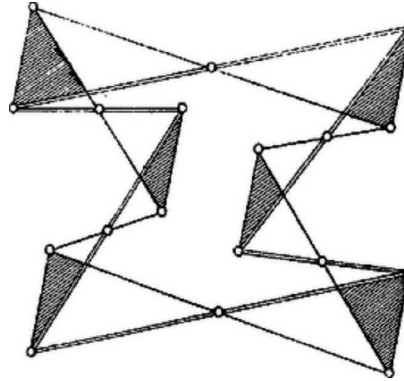
$P_4DQ_5EP_6Q_6FP_1 = S$ sokszöget kapjuk. Ugyanezt a sokszöget kapjuk P -ből a jobb oldalon felsorolt háromszögek hozzávételével. Eszerint, a P, Q, S idom területét is P -vel, Q -val, ill. S -sel jelölve, a (7) egyenlőségek összeadásával adódó egyenlőség két oldalának értékét pedig T -vel, a következő egyenlőséget írhatjuk fel:

$$S = Q + T = P + T.$$

Innen $Q = P$. Ezzel az állítást – az ábrán felvett esetre – bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Számos versenyző a P és Q hatszögek közös részéhez, a $Q_1AP_2BQ_3CM_1DP_5EM_2F$ sokszöghöz vette hozzá a bal-, ill. jobboldalon álló háromszögeket. (M_1 a P_3P_4 és Q_4Q_5 , M_2 pedig a PP_1 és Q_5Q_6 oldalak közös pontja; ezek nem egymásnak megfelelő oldalak; csak esetleges, hogy van közös pontjuk; ábránkon több ilyen oldalpár nincs is.) Egy részük nem vette észre, hogy így nem P -t, ill. Q -t kapta, hanem nagyobb idomot, mert egy-egy hozzávett háromszög részei, az $M_1P_4Q_4$ és $M_2P_6Q_6$ háromszögek sem P -hez, sem Q -hoz nem tartoznak hozzá. Mások ezek elvételével tették teljessé bizonyításukat.

A (7) háromszögekkel „kétszer fedett” $M_1P_4Q_4$ háromszög azért keletkezett, mert a C , D egymás utáni felezőpontok a P_4Q_4 egyenes ugyanazon oldalán vannak. Ha egy ilyen P_iQ_i egyenes átmegy a $P_{i-1}P_i$, vagy a P_iP_{i+1} oldal felezőpontján, akkor a (7) felsorolás megfelelő háromszöge egyenesszakasszá fajul, egyszersmind kétszer fedett háromszög sem keletkezik. Előfordulhat viszont, hogy mind a hat szakaszon létrejön kétszer fedett háromszög (2. ábra).



2. ábra

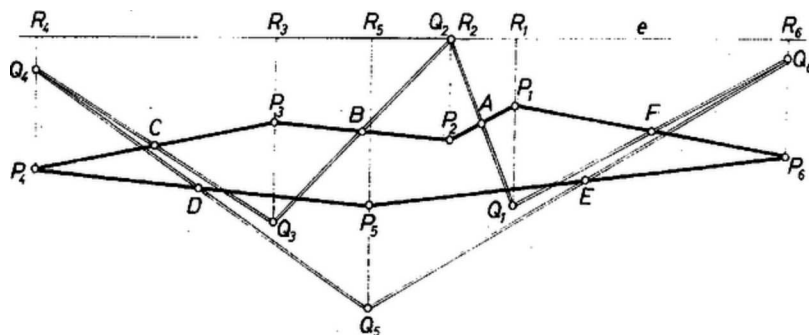
II. megoldás. P és Q egy-egy közös felezőponttal bíró oldalának – pl. az egymást A -ban felező P_1P_2 , Q_1Q_2 oldalpárnak – végpontjai paralelogrammát alkotnak, ezért $P_1Q_1 \parallel Q_2P_2 \parallel P_3Q_3 \parallel Q_4P_4 \parallel P_5Q_5 \parallel Q_6P_6$. Vegyünk egy a P_1Q_1 -re merőleges, sem P -t, sem Q -t nem metsző e egyenest, és vetítsük erre P és Q csúcsait. A P_1 , Q_1 , a P_2 , Q_2 , ..., a P_6 , Q_6 pontpárok vetülete egybeesik, jelöljük ezeket rendre R_1 , R_2 , ..., R_6 -tal (1. ábra, ezek közül egyesek egybe is eshetnek). Ekkor P és Q területét úgy kaphatjuk, hogy 4 – 4 trapéz területének összegéből kivonjuk más 2 – 2 trapéz területének összegét:

$$(8) \quad \begin{aligned} P &= P_4P_3R_3R_4 + P_3P_2R_2R_3 + P_2P_1R_1R_2 + P_1P_6R_6R_1 - P_4P_5R_5R_4 - P_5P_6R_6R_5, \\ Q &= Q_4Q_3R_3R_4 + Q_3Q_2R_2R_3 + Q_2Q_1R_1R_2 + Q_1Q_6R_6R_1 - Q_4Q_5R_5R_4 - Q_5Q_6R_6R_5. \end{aligned}$$

A két kifejezés ugyanazon sorszámú tagjai páronként egyenlők, mert a megfelelő trapézok magassága és középvonala közös; pl. az első tagokra R_4R_3 és CC' , ahol C' a C -nek e -n levő vetülete. Ezért $P = Q$.

Az ábránktól különböző esetekben a (8) előállításokban a hozzáadandó tagok száma legalább 1, legfeljebb 5, és ezt a számot a levonandó tagok száma 6-ra egészíti ki. Amennyiben szomszédos indexű R pontok egybeesnek, a tagok száma csökken.

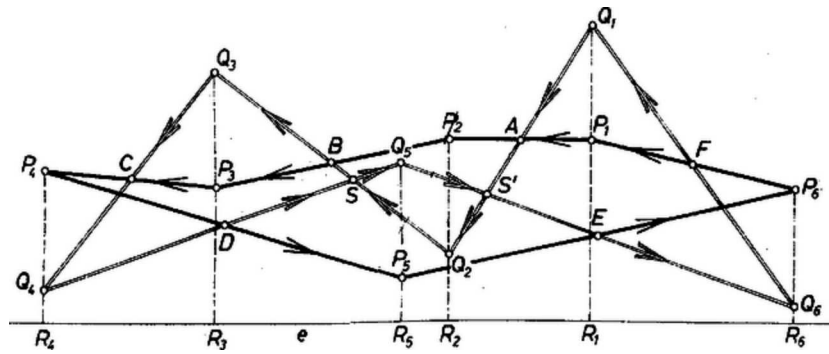
Megjegyzések. 1. A most bemutatott módon szokás meghatározni sokszögek területét, ha csúcsaik koordinátaikkal vannak adva. Így határozza meg a földmérő mérnök is sokszög alakú telkek területét.



3. ábra

2. Ez a bizonyítás mutatja, hogy az állítás a 3. ábra esetében is érvényes, ahol P és Q közös része nem összefüggő: két négyszögre és egy hatszögre esik szét. Ebben az esetben az I. megoldás megjegyzésében említett megfontolást jelentősen ki kellene egészítenünk.

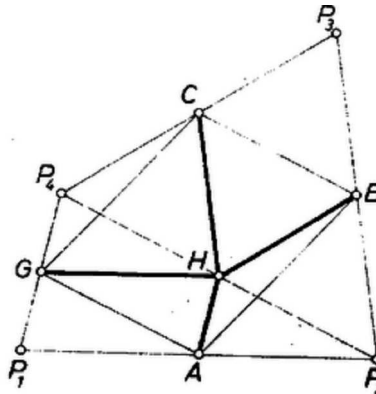
3. A 4. ábra esetében Q hurkolt, Q_2Q_3 és Q_4Q_5 oldalszakaszainak közös pontja S , a Q_1Q_2 és Q_5Q_6 szakaszok közös pontja S' . Ilyen idom területét eddig nem értelmeztük. Az oldalszakaszok, ill. részeik a $Q_1S'Q_6 = H_1$ és $SQ_3Q_4 = H_2$ háromszögeket és az $S'_1Q_2SQ_5 = N$ négyszöget határolják körül.



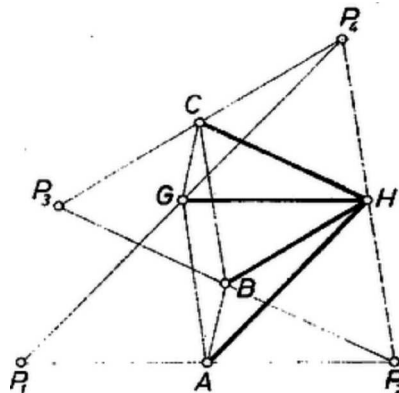
4. ábra

Nézzük meg, mit ad ebben az esetben a II. megoldás gondolatmenete. N területét (8) pozitív tagjaiban nem vettük számításba, mert a négyszög az $R_3Q_3Q_2R_2$, $R_2Q_2Q_1R_1$ trapézokon kívül van, a negatív tagokban viszont levontuk, mert az $R_4Q_4Q_5R_5$, $R_5Q_5Q_6R_6$ trapézok tartalmazzák. Eszerint az állítás érvényes marad, ha Q területén ezúttal a $H_1 + H_2 - N$ kifejezést értjük. (Könnyen megjegyezhető ez a megállapodás, ha összehasonlítjuk a H_1 , H_2 és N részek körüljárásának irányát, miközben Q kerületét $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ sorrendben körüljárjuk. H_1 és H_2 körüljárása az óramutató járásával ellentétes irányú, akárcsak a $P = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ körüljárásé, N körüljárása pedig az óra járásával megegyező. Másképpen: H_1, H_2 és P körülhatárolt része a mondott körüljárásban a menetvonal bal oldalán van, N -é pedig a jobb oldalon.)

III. megoldás. Ismeretes, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogramma csücsai, melynek oldalai párhuzamosak a négyszög átlóival és fele akkorák, mint az átlók (5. ábra, $P_1P_2P_3P_4$ és $ABCG$). Megmutatjuk, hogy a paralelogramma területe fele a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög területének. Valóban, a P_2P_4 átló H felezőpontját A -val, B -vel, C -vel, ill. G -vel összekötő szakasz rendre párhuzamos és egyenlő a P_4P_1 , P_4P_3 , P_2P_3 , ill. P_2P_1 oldal felezésével előállt szakaszokkal. Ezért az ABH és CGH háromszögek áttolhatók GCP_4 -be, ill. BAP_2 -be és a BCH és GAH háromszögek 180° -os forgatással átforgathatók CBP_3 -ba, ill. AGP_1 -be. Így pedig a négy részre darabolt $ABCG$ paralelogramma részeivel maradéktalanul lefedhetjük a $P_1P_2P_3P_4$ négyszögnek a paralelogrammán kívüli részeit.

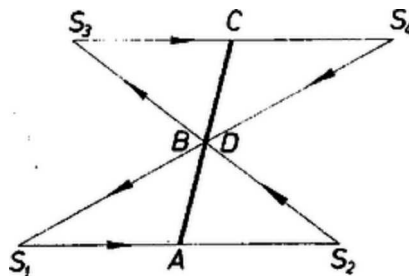


5. ábra

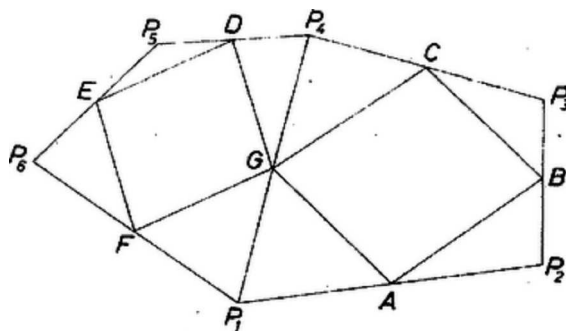


6. ábra

(Állításunk hurkolt négyszögre is igaz – 6. ábra –, ha ennek területét a fenti megjegyzés szerint értelmezzük, továbbá a felhasznált háromszögek területét pozitív, ill. negatív előjellel tekintjük aszerint, hogy felsorolt körüljárásuk iránya megegyező, ill. ellentétes az $ABCG$ paralelogramma körüljárásának irányával. Ha a hurkolt négyszöget az $S_1S_2S_3S_4$ paralelogrammából képezzük az S_3 és S_4 csúcsok felcserélésével, akkor az oldalfelező pontok egy egyenesre esnek (7. ábra), $ABCD = 0$, megfelelően annak, hogy $S_1S_2B\Delta \cong S_4S_3D\Delta$, és így különbségük 0. A továbbiakban is minden területet így értünk.)



7. ábra



8. ábra

Ezek szerint a fenti P hatszöget a P_1P_4 átlóval a $P_1P_2P_3P_4$ és $P_1P_4P_5P_6$ négyszögekre bontva és ezen átló felezőpontját G -vel jelölve P területe kétszerese az $ABCG$ és $GDEF$ paralelogrammák területe összegének (8. ábra).

Ha mármost Q hatszög oldalainak felező pontjai ugyancsak rendre az $A, B, \dots, F$ pontok, akkor Q területe is kétszerese az $ABCG + DEFG$ összegnek, és így egyenlő P területével, ugyanis a paralelogrammák negyedik (G) csúcsát az első három csúcs egyértelműen meghatározza, ha sorrendjük is adva van. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. Látható, hogy a négyszögszögek felezőpontjai közül csak 3 független egymástól (A, B, C) és sorrendjük meghatározza G -t. Másrészt az is, hogy tetszés szerinti számú olyan négyszög szerkeszthető, melyre az oldalak felezőpontjai rendre azonosak A, B, C, G -vel. Ha ugyanis egy tetszés szerinti S_1 pont A -ra vett tükörképe S_2 , S_2 -é B -re S_3 és S_3 -é C -re S_4 , akkor S_4 -nek G -re vett tükörképe azonos S_1 -gyel. Hasonlóan a hatszögszögek felezőpontjai közül csak öt független egymástól. Pl. felvéve az A, B, C, D és E pontokat, megszerkeszthetjük a G pontot, mint az $ABCG$ paralelogramma negyedik csúcsát, majd az F pontot, mint a $GDEF$ paralelogramma negyedik csúcsát. Ha viszont az adott 6 felezőpont megfelel e feltételnek, akkor az előbbihez hasonló tükrözéssorozattal akárhány olyan hatszög szerkeszthető, melyre az egymás utáni oldalak felezőpontja A, B, C, D, E, F .

2. Az eddigi felezőpontokat A, B, C, F, E, D sorrendben véve a létrejövő hatszögek területe az előbbiektől általában különböző, mert így a $DEFG$ paralelogramma helyére $FEDG$ lép, és ezek területei egymásnak negatívjai. Ezért nem felesleges a feladatnak az a kikötése, hogy a hatszögszögek felezőpontjainak rendre kell megegyezniük.

3. Az állítás hatszög helyett bármely páros oldalszámú sokszög esetére érvényes, megjegyezve azt, hogy az utolsó felezőpontot a többiek – és sorrendjük – egyértelműen meghatározzák. Ez abból következik, hogy minden $2n$ oldalú sokszög ($2n \geq 6$) egy csúcsból kiinduló átlókkal $n - 1$ négyszögre bontható.

Néhány versenyző akárhány oldalú sokszögre érvényesnek vélte az állítást. Ez a sejtés a páratlan oldalszámú sokszögekre semmitmondó. Ugyanis egy háromszög oldalainak felezőpontjai egyértelműen meghatározzák a háromszöget, és ugyanez áll a $2n - 1$ oldalú sokszögekre¹ ($2n - 1 \geq 5$), mert ezekben egy csúcsból azokat az átlókat meghúzva, amelyek a sokszöget egy négyszögre és egy $2n - 3$, ill. $2n - 5, \dots$ -szögre bontják (pl. $P_1P_4, P_1P_6, P_1P_8, \dots, P_1P_{2n-2}$) utoljára háromszöget kapunk. Ezt az oldalak felezőpontjai egyértelműen meghatározzák és ebből kiindulva a sokszög többi csúcsai is egyértelműen meghatározhatók.

¹Lásd 502. gyakorlat, K. M. L. 18 (1959/2) 45. o. és 557. gyakorlat, K. M. L. 19 (1959/11) 136. o.