

1. feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$(1) \quad 105(x+y) = 120(y+z) = 168(z+x) = xyz.$$

I. megoldás. Az adott 4 tagú egyenlőségsorozat bármely két tagja egyenlő kell, hogy legyen. Pl. az első kifejezés egyenlőségét írva fel a többi hárommal, két elsőfokú egyenletet kapunk és az ismeretlenek szorzata csak egy egyenletben lép fel:

$$(2) \quad 105(x+y) = 120(y+z),$$

$$(3) \quad 105(x+y) = 168(z+x),$$

$$(4) \quad 105(x+y) = xyz.$$

(Ezekből a jobb oldalak egyenlősége már következik.)

Fejezzük ki az első két egyenletből y -t és z -t x -szel. Osszuk (2)-t 15-tel, (3)-at 21-gyel és vonjuk ki az utóbb kapott egyenletet az előbbiből. Így z kiesik:

$$7(x+y) - 5(x+y) = 8(y+z) - 8(z+x) = 8(y-x),$$

amiből

$$(5) \quad y = \frac{15x}{3}.$$

Ennek alapján (2)-ből

$$(6) \quad z = \frac{7}{8}(x+y) - y = \frac{7}{8} \cdot \frac{8x}{3} - \frac{5x}{3} = \frac{2x}{3}.$$

Ezeket (4)-be helyettesítve rendezés után

$$105 \cdot \frac{8x}{3} - \frac{10x^3}{9} = 0, \quad x(7 \cdot 4 \cdot 9 - x^2) = 0,$$

és ennek gyökei:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 9} = 6\sqrt{7}, \quad x_3 = -6\sqrt{7}.$$

y és z megfelelő értékei (5), ill. (6) alapján:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, & y_2 &= 10\sqrt{7}, & y_3 &= -10\sqrt{7}, \\ z_1 &= 0, & z_2 &= 4\sqrt{7}, & z_3 &= -4\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Mindhárom értékhármas kielégíti az egyenletrendszert.

II. megoldás. Egyszerűen jutunk célhoz akkor is, ha (1)-ből úgy írunk fel három független egyenletet, hogy az első három kifejezést külön-külön a negyedikkel tesszük egyenlővé, majd a fentiekhez némileg hasonlóan mindhárom ismeretlent kifejezzük az $xyz = p$ szorzattal, és először p -t számítjuk ki. A mondott egyenletekből mindjárt osztással:

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{p}{105}, \\ y+z &= \frac{p}{120}, \\ x+z &= \frac{p}{168}. \end{aligned}$$

Az első kettő összegéből a harmadikat kivonva

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{p}{105} + \frac{p}{120} - \frac{p}{168} = \frac{p}{840}(8+7-5) = \frac{p}{84}, \\ y &= \frac{p}{168}, \text{ és hasonlóan } z = \frac{p}{420}, \quad x = \frac{p}{280}. \end{aligned}$$

Most már szorzással

$$\frac{p}{420} \cdot \frac{p}{168} \cdot \frac{p}{280} = p, \quad p(p^2 - 15 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 28^3) = 0,$$

amiből, a zárójelbeli kivonandó $15 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 28^2 \cdot 2^2 \cdot 7$ alakjával

$$p_1 = 0 \quad p_2 = 1680\sqrt{7}, \quad p_3 = -1680\sqrt{7},$$

és így a fenti kifejezésekkel ismét az

$$x, y, z = \begin{cases} 0, & 0, & 0, \\ 6\sqrt{7}, & 10\sqrt{7}, & 4\sqrt{7}, \\ 6\sqrt{7}, & -10\sqrt{7}, & -4\sqrt{7} \end{cases}$$

gyökrendszereket kapjuk.