

I. megoldás: Észrevehetjük, hogy a szorzat első és negyedik tényezőjének számtani közepe egyenlő a második és harmadik tényező számtani közepével, $x + \frac{5}{2}$ -del. Tekintsük ezt új ismeretlennek, legyen tehát

$$(2) \quad x + \frac{5}{2} = z, \quad \text{azaz } x = z - \frac{5}{2},$$

így a

$$\left(z - \frac{5}{2}\right) \left(z - \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{5}{2}\right) + 8 = \left(z^2 - \frac{25}{4}\right) \left(z^2 - \frac{1}{4}\right) + 8 = 0,$$

azaz

$$z^4 - \frac{13}{2}z^2 + \frac{153}{16} = 0$$

egyenletre jutunk. Kiszámítva a gyököket, majd (2) szerint az ezekhez tartozó x értékeket:

$$\begin{array}{ll} z^2 = \frac{13}{4} \pm 1 & \begin{array}{ll} z_1 = \frac{\sqrt{17}}{2}, & x_1 = \frac{\sqrt{17}-5}{2}, \\ z_2 = -\frac{\sqrt{17}}{2}, & x_2 = \frac{-\sqrt{17}-5}{2}, \\ z_3 = \frac{3}{2}, & x_3 = -1, \\ z_4 = -\frac{3}{2}, & x_4 = -4, \end{array} \end{array}$$

az egyenletet megoldottuk. Látjuk, hogy mind a négy gyök valós.

II. megoldás: Vegyük észre, hogy (1) első tagjában az első és negyedik tényező szorzata a második és harmadik tényező szorzatától csak állandóan különbözik. Egyenletünk tehát ilyen alakúra hozható:

$$(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 6) + 8 = 0.$$

Vegyük új ismeretlennek az új első tényezőt:

$$(3) \quad x^2 + 5x = w,$$

így a

$$w(w + 6) + 8 = 0$$

egyenletre jutunk, melynek gyökei:

$$w_1 = -2, \quad w_2 = -4.$$

Ezeket rendre (3)-ba helyettesítve nyerjük, hogy a w_1 -hez tartozó két x gyök éppen az I. megoldás során nyert x_1 és x_2 , míg a w_2 -höz tartozó két gyök a fenti x_3 és x_4 -gyel egyezik meg.

Megjegyzések. 1. Minden

$$(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) + e = 0$$

alakú egyenlet megoldható akár az I., akár a II. megoldásban alkalmazott helyettesítéssel, hacsak az a, b, c, d számok két egyenlő összegű párba kapcsolhatók, pl.

$$a + b = c + d.$$

2. Az adott egyenlet elég egyszerű ahhoz, hogy az egész gyökökre némi próbálgatással is rá lehessen jutni. Azonban maga az a feltevés, hogy a gyökök egész számok, általában indokolatlan, hiszen pl. az

$$x(x + 2)(x + 3)(x + 5) + 10 = 0$$

egyenletnek egyik gyöke sem egész, sőt még csak nem is valós, amiről könnyen meggyőződhetünk, ha a gyököket akár az I., akár a II. megoldásban alkalmazott helyettesítéssel kiszámítjuk. Annyi mindenesetre látható az (1)-beli szorzaton, hogy x nem lehet (racionális) tört, mert $x = p/q$ -val – ahol p és q relatív prím egészek, $q > 1$ –, mind a négy tényező tört, és nevezője q , márpedig egyenlő nevezőjű nem egyszerűsíthető törtek szorzata nem lehet egész.