

I. megoldás: Jelöljük a háromszög befogóit a és b -vel, átfogóját c -vel. Feltéhetjük, hogy $a < b$, ugyanis az egyenlő szárú derékszögű háromszögnek nem lehet mind a három oldala egész szám. Pythagorász tétele szerint

$$(1) \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

a feladat követelménye szerint pedig

$$(2) \quad ab = 3(a + b + c).$$

Meg kell határoznunk az (1), (2) egyenletrendszer pozitív egész megoldásait, azaz meg kell oldanunk ezen diophantoszi egyenletrendszert. Ebben eljárhatunk úgy, hogy kiküszöböljük c -t, így egyetlen, az a és b -ben szimmetrikus diophantoszi egyenletre jutunk – ugyanis (1) és (2) mindegyike a és b -ben szimmetrikus –, ezt megoldjuk, majd a megoldások közül kiválasztjuk azokat, amelyekhez (1) vagy (2) szerint tartozó c szintén egész szám.

(2)-ből

$$(2a) \quad c = \frac{ab}{3} - a - b,$$

ezt (1)-be helyettesítve, a törtek eltávolításával

$$9(a^2 + b^2) = a^2b^2 + 9a^2 + 9b^2 - 6a^2b - 6ab^2 + 18ab,$$

majd rendezés után ab -vel végigosztva (ugyanis $a, b \neq 0$) az egyenletet így alakíthatjuk:

$$(3) \quad (a - 6)(b - 6) = 18.$$

a és b -vel együtt a bal oldal tényezői egészek. A jobb oldali szám hatféleképpen bontható fel két egész szám szorzatára:

$$1 \cdot 18, \quad 2 \cdot 9, \quad 3 \cdot 6, \quad \text{továbbá} \quad (-1) \cdot (-18), \quad (-2) \cdot (-9), \quad (-3) \cdot (-6).$$

Mivel azonban a és b pozitívak, tehát $a - 6$ és $b - 6$ mindegyike nagyobb -6 -nál, és ezt a követelményt 18 negatív egész tényező párai közül egyik sem teljesíti egyidejűleg mindkét tényezőre, azért csak a pozitív tényezőkre bontások felelnek meg. Ezek szerint (3)-nak három megoldása van:

$$\begin{aligned} a - 6 &= 1, & 2, & 3, \\ \text{és } b - 6 &= 18, & 9, & 6\text{-ból:} \\ a &= 7, & 8, & 9, \\ \text{és } b &= 24, & 15, & 12. \end{aligned}$$

Mivel 18-cal együtt az $a - 6$ és $b - 6$ tényezőknek legalább az egyike osztható 3-mal, azért ugyanez áll a 6-tal nagyobb a és b -re és következésképpen szorzatukra is, ennél fogva a (2a)-ból kiszámítható c mindhárom esetben egész szám:

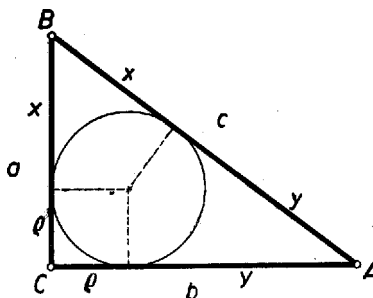
$$c = 25, \quad 17, \quad 15.$$

Ezek szerint a követelményeknek három háromszög felel meg.

Megjegyzés. Néhány versenyző indokolatlanul feltételezte, hogy a keresett háromszög oldalainak aránya $3 : 4 : 5$. Miután a megoldások között ilyen is van, így véletlenül ebből az alaptalan feltevésből is rá lehetett jutni egy megoldásra, de nem mindre.

II. megoldás: Ismeretes, hogy minden háromszög területe $t = \varrho \cdot s$ alakban írható, ahol ϱ a háromszög beírt körének sugara, és s a háromszög félkerülete. Így a keresett háromszögre nézve $2\varrho s = 3 \cdot 2s$, és innen, mivel s nem lehet 0, $\varrho = 3$, egész szám.

A beírt kör érintési pontjai az oldalakat úgy osztják két-két részre, hogy a csúcsokban összefutó részek páronként egyenlők. A derékszög csúcsában összefutó két rész hossza ϱ , mert e részek és a végpontjaikhoz tartozó sugarak által alkotott négyszögben három derékszög van, és két szomszédos oldal egyenlő, tehát az idom négyzet. Eszerint, az átfogó két szakaszát x, y -nal jelölve az oldalak rendre: $a = \varrho + x = 3 + x$, $b = \varrho + y = 3 + y$, $c = x + y$ tehát $x = a - 3$, $y = b - 3$ egész számok.



Pythagorász tételével

$$(3+x)^2 + (3+y)^2 = (x+y)^2,$$

ezt az egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$$(4) \quad (x-3)(y-3) = 18.$$

Eszerint ismét 18 egész tényező párokra bontásai vezetnek megoldáshoz. A beírt kör középpontja, a befogókon levő érintési pontok és az átfogó végpontjai által meghatározott derékszögű háromszögekből látható, hogy az x, y befogók nagyobbak ϱ -nál, mert velük szemben nagyobb szög fekszik. Ugyanis e háromszögek ϱ -val szemben fekvő szögei fele akkorák, mint az eredeti háromszög hegyes szögei, tehát kisebbek 45° -nál. Eszerint $x, y > \varrho = 3$, így $x-3, y-3$ pozitívok és $a < b$ -re tekintettel $x-3 < y-3$. Így 18-nak ismét csak a pozitív tényezőkre való felbontásai jönnek szóba:

$$\begin{aligned} x-3 &= 1, & 2, & 3, \\ \text{és } y-3 &= 18, & 9, & 6\text{-ból,} \\ a = x+3 &= (x-3)+6 &= 7, & 8, & 9, \\ b = y+3 &= (y-3)+6 &= 24, & 15, & 12, \\ c = x+y &= (x-3) + (y-3) + 6 = 25, & 17, & 15, \end{aligned}$$

ismét az I. megoldásban nyert háromszögekre jutottunk.

Megjegyzés. A kitűzött feladat speciális esete a következő feladatnak: *Egy derékszögű háromszög oldalainak mértékszámai egész számok. A háromszög területe mértékszámának kétszerese egyenlő a terület mértékszámának ϱ -szorosával, ahol ϱ adott pozitív egész szám. Mekkora a háromszög oldalai?* (Esetünkben $\varrho = 3$ volt.) A követelmény szerint a $2t : 2s$ arány értéke ϱ , az ezzel egyenlő $t : s$ arány viszont – mint láttuk – a beírt kör sugarát adja meg, ennél fogva a ϱ szám minden megoldásban a beírt kör sugarának mértékszámát. Ebből a II. megoldás gondolatmenetével (4) helyett az

$$(5) \quad (x-\varrho)(y-\varrho) = 2\varrho^2 \quad x, y > \varrho$$

diophantoszi egyenletre jutunk. Ebből annyi megoldást nyerünk, ahányféleképpen $2\varrho^2$ -et két pozitív egész tényező szorzatára lehet bontani, ugyanis $\varrho, x-\varrho, y-\varrho$ -val együtt $x, y, a = x+\varrho, b = y+\varrho$ és $c = x+y$ szintén egész számok.

Érdekes, hogy ϱ minden értéke mellett van olyan megoldás, melyben az oldalak aránya $3 : 4 : 5$. Erre vezet ugyanis $2\varrho^2$ -nek $\varrho \cdot 2\varrho$ alakú felbontása: $x-\varrho = \varrho, y-\varrho = 2\varrho$ -ból $x = 2\varrho, y = 3\varrho$ és $a = 3\varrho, b = 4\varrho, c = 5\varrho$.

III. megoldás: Ismeretes, hogy az (1) pythagorászi egyenletet kielégítő a, b, c egész számhármassokat pythagorászi számhármassoknak szokás nevezni. Az ilyeneknek minden $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ többszöröse – ha λ pozitív egész szám – ugyancsak pythagorászi számhármass. Ha a és b relatív prímek, akkor c és a , továbbá c és b szintén relatív prímek, ilyen esetben a, b, c -t alaphármassnak nevezzük. Ismeretes az is, hogy minden alaphármas kifejezhető két u, v paraméterrel a következőképpen:

$$(6) \quad a = u \cdot v, \quad b = \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad c = \frac{u^2 + v^2}{2},$$

ahol u és v pozitív egész, páratlan relatív prim számok.¹ Ezekkel minden pythagorászi számhármass így írható:

$$(7) \quad a = \lambda \cdot u \cdot v, \quad b = \lambda \cdot \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad c = \lambda \cdot \frac{u^2 + v^2}{2},$$

ugyanis minden pythagorászi számhármass valamely alaphármass többszöröse.

Feladatunk most már a (7) közül kiválasztani a (2)-nek eleget tevő számhármassokat. (Az $a < b$ követelményt a továbbiakban természetesen nem tarthatjuk fenn, mert a és b kifejezése lényegesen különböző.) E kifejezéseket (2)-be beírva $b + c = \lambda u^2$ alapján a

$$\lambda^2 uv(u-v)(u+v) = 6\lambda u(v+u)$$

egyenletre jutunk. Ezt λ -val, u -val és $u+v$ -vel oszthatjuk, mert egyikük se 0:

$$\lambda v(u-v) = 6.$$

¹ Hasonló, még ismertebb kifejezések a következők:

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2,$$

ahol u, v relatív prim pozitív egész számok, $u > v$, egyikük páros, másikuk páratlan. Ezt lásd pl: *Rademacher–Toeplitz: Számokról és alakzatokról, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, 1954. 84. o.*

A bal oldal tényezői közül v páratlan, $u - v$ páros, és λ tetszőleges pozitív egész. Másrészt $6 = 2 \cdot 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$, így a tényezők megfeleltetésére a következő lehetőségek vannak:

	$v =$	1,	3,
	$u - v =$	2, $\overbrace{\hspace{1cm}}$ 6,	2,
ekkor	$\lambda =$	3,	1, 1,
és	$u =$	3,	7, 5,
ennélfogva (7) szerint			
	$a =$	9,	7, 15,
	$b =$	12,	24, 8,
	$c =$	15,	25, 17,

Ismét az előzők során nyert háromszögekhez jutottunk. Látjuk továbbá a $\lambda = 1$ értékből, hogy a második és a harmadik megoldás alaphármas. Valóban, a 7, 24, 25 és a 15, 8, 17 számok páronként relatív prímek, az első hármas viszont $\lambda = 3$ -szorosa a 3, 4, 5 alaphármasnak.