

I. megoldás: Az állítás egyenlő szárú háromszögre nyilván igaz, hiszen a két egyenlő szög különbsége 0° . Ezért feltehetjük, hogy a szokásos jelölésekkel

$$(1) \quad \alpha > \beta > \gamma,$$

és a feladat megszorításánál fogva

$$(2) \quad \alpha < 90^\circ.$$

Az állítást indirekt úton bizonyítjuk. Feltesszük, hogy van olyan háromszög, amelyben

$$(3) \quad \alpha - \beta \geq 30^\circ,$$

és

$$(4) \quad \beta - \gamma \geq 30^\circ,$$

és megmutatjuk, hogy ilyen háromszög nem lehet hegyesszögű. Valóban, (3) kétszeresét és (4)-et hozzáadva a szögekre érvényes

$$(5) \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

egyenlőséghez, azt kapjuk, hogy

$$3\alpha \geq 270^\circ, \quad \text{azaz} \quad \alpha \geq 90^\circ.$$

Eszerint hegyesszögű háromszögre (3) és (4) egyidejűen nem teljesülhet, ezért legalább az egyik szögekülönbség kisebb 30° -nál. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések: 1. Meggondolásunkat egyenlőtlenségekkel való műveletek nélkül is elmondhatjuk. Feltesszük, hogy van olyan pozitív δ és ε szög, hogy

$$(3') \quad \beta = \alpha - (30^\circ + \delta)$$

és

$$(4') \quad \gamma = \beta - (30^\circ + \varepsilon).$$

Előbb (4')-t, majd (3')-t (5)-be helyettesítve átalakítással az

$$\alpha = 90^\circ + \frac{2\delta + \varepsilon}{3}$$

összefüggésre jutunk, ami ellentmond (2)-nek.

2. Több efféle úton járó versenyző szükségtelenül feltette, hogy $\delta = \varepsilon$, vagyis hogy $\alpha - \beta = \beta - \gamma$. Az ilyen megoldások nem teljesek, hiszen csak egy további speciális feltételnek eleget tevő háromszögekkel foglalkoznak; még jobban látszik ez abból, hogy minden ilyen háromszögben $\beta = 60^\circ$.

3. Többen ilyenféleképpen kezdték okoskodásukat: „legyen α csak egy kevésse kisebb 90° -nál, pl. $89^\circ 59'$ ”. Az ilyen feltevés – még ha azt helyes okoskodás követi is – eleve lemond a bizonyítás teljességéről, hiszen figyelmen kívül hagyja mindazokat a hegyesszögű háromszögeket, melyek legnagyobb szöge 90° és $89^\circ 59'$ közé esik. Az idézett feltevés abból a hibás szemléletből ered, mintha létezne a 90° -nál kisebb szögek között egy legnagyobb szög. Ilyen azonban nincs.

II. megoldás: Vizsgáljuk a háromszögnek nagyságra nézve középső szögét, azaz (1) szerint β -t. Ha ez legalább 60° , akkor $\alpha - \beta < 30^\circ$; ha viszont $\beta < 60^\circ$, akkor $\alpha + \beta < 150^\circ$, és így $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) > 30^\circ$, tehát $\beta - \gamma < 30^\circ$. A feladat állítása tehát mindkét esetben teljesül.