

I. megoldás: Próbálgatással könnyen kapjuk a következő felbontásokat:

$$\begin{aligned}3^3 - 1^3 &= 26 = 1^2 + 3^2 + 4^2 = 0^2 + 1^2 + 5^2, \\4^3 - 2^3 &= 56 = 2^2 + 4^2 + 6^2, \\5^3 - 3^3 &= 98 = 3^2 + 5^2 + 8^2 = 1^2 + 4^2 + 9^2 = 0^2 + 7^2 + 7^2, \\6^3 - 4^3 &= 152 = 4^2 + 6^2 + 10^2 = 2^2 + 2^2 + 12^2, \\2^3 - 0^3 &= 8 = 0^2 + 2^2 + 2^2, \\1^3 - (-1)^3 &= 2 = (-1)^2 + 1^2 + 0^2, \\(-2)^3 - (-4)^3 &= 56 = (-4)^2 + (-2)^2 + (-6)^2.\end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy mindegyik különbség elsőnek írt felbontásában az első két négyzetszám alapja az a két szám, amelyek köbeinek különbségét éppen vizsgáljuk, a harmadik négyzetszám alapja pedig az előbbi kettőnek az összege. Ezek alapján azt sejtjük, hogy a vizsgálandó számokat n és $n+2$ -vel jelölve bármely n mellett fennáll

$$(1) \quad (n+2)^3 - n^3 = n^2 + (n+2)^2 + (2n+2)^2.$$

Sejtésünk bizonyítására a két oldali hatványokat kifejtve mindkét oldalon $6n^2 + 12n + 8$ -at kapunk, tehát (1) helyes. Ha n és vele $n+2$ egész szám, akkor összegük is az, tehát a jobb oldal mindhárom tagja négyzetszám. Evvel az állítást igazoltuk.

Megjegyzések: 1. Kevesebb konkrét próbálgatást végzünk a következő megfontolásban, és nem lesz szükség bizonyításra. Nyilvánvaló, hogy a köbök

$$(2) \quad (n+2)^3 - n^3 = 6n^2 + 12n + 8$$

különbségében n -et változtatva a négyzetszámok alapjai is változnak, függenek n -től. Tegyük fel, hogy van olyan felbontás, melyben az alapok n -nek elsőfokú függvényei, vagyis ilyen alakúak:

$$(3) \quad an + b, \quad cn + d, \quad en + f,$$

ahol a, b, c, d, e, f egész számok. Ezek négyzetösszege átrendezéssel

$$(4) \quad (a^2 + c^2 + e^2)n^2 + 2(ab + cd + ef)n + (b^2 + d^2 + f^2).$$

Ha találunk olyan $a, b, \dots, f$ egész számokat, amelyekkel (4) egymás utáni együtthatói egyenlők a (2) jobb oldalán álló együtthatókkal:

$$(5) \quad a^2 + c^2 + e^2 = 6,$$

$$(6) \quad 2(ab + cd + ef) = 12,$$

$$(7) \quad b^2 + d^2 + f^2 = 8,$$

evvel igazoltuk az állítást, és a talált $a, b, \dots, f$ számokkal képezett (3) kifejezések minden n -re adnak egy alapszám-hármaszt a kívánt négyzetösszegfelbontáshoz.

(5) és (7) szerint az $a, b, \dots, f$ együtthatók négyzetei számára csak a 6-on, 8-on aluli négyzetszámok jönnek szóba: 0, 1 és 4. Ezek közül vett három tagból a 6-os, 8-as összeg $1 + 1 + 4$, ill. $0 + 4 + 4$ alakban kiadódik. Ennek alapján vehetjük egyrészt, hogy $a = c = 1, e = 2$, másrészt hogy b, d, f értékei valamely sorrendben a 0, 2, 2 számok, és e sorrendet cserélgetve megvizsgálhatjuk, hogy teljesül-e (6). Mindjárt a $b = 0, d = f = 2$ értékrendszerrel való próba eredményes, ezekkel a (3) kifejezések az (1) jobb oldalán álló alapokat adják.

2. Az (1) jobb oldalán álló alapszámok bármelyike helyett (-1) -szeresét véve – vagyis pl. c és d előjelének egyidejű cseréjével – csupán látszólag kapnánk újabb felbontást, hiszen így maguk a négyzetszámok ugyanazok maradnak. (Ilyenkor (5) és (7)-ben a négyzetek, és (6)-ban a szorzatok értéke változatlan.) Felvetődik azonban a kérdés: található-e a (3) együtthatói számára adódott számok sorrendjének, valamint pl. c és d egyikének előjelét megváltoztatva – vagy másképpen – az (1)-től lényegesen különböző felbontás?

Nyilván sem (5)-ben, sem (7)-ben nem lehetséges más megfelelő előállítás. Továbbá, hogy az eddigi $b = 0, d = 2$ értékeket felcserélve sem kapunk új felbontást, $f = 0, b = 2$ -vel pedig a (6) bal oldalán álló $ab + cd + ef$ kifejezés értéke kisebbnek adódik. Mindig az eddigi 6-nál kisebbnek adódik ez a kifejezés, vagy változatlan marad, ha bármelyik tagjának egyik tényezőjét ellentett jellel próbáljuk venni. Így tehát nem kapunk új felbontást.

Nem jöhet szóba a (3)-beliek helyére elsőnél magasabb fokú kifejezés sem – pl. egy vagy több másodfokú –, mert ilyenek négyzetében a legmagasabb fokú tag pozitív, és így összegük nem lehet 0, amint (2) jobb oldala kívánná.

3. Legutóbbi meggondolásunkat nem teszi feleslegessé az az észrevétel, hogy $4^3 - 2^3 = 56$ -ra csak a $2^2 + 4^2 + 6^2$ felbontást adtuk, és könnyű belátni, hogy más ilyen felbontás nincs. Gondolni kell ugyanis arra, hogy e felbontás 2, 4, 6 alapszámait más (3) alakú kifejezések is kiadhatnák $n = 2$ -vel.

II. megoldás: Ismert azonosság szerint

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Innen az $x - y = 2$ értéket figyelembe véve, alkalmas csoportosítással azonnal adódik, hogy

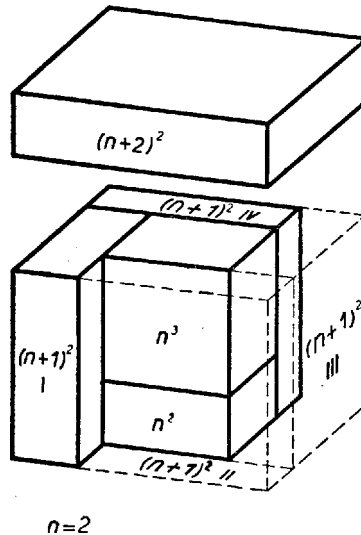
$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= 2x^2 + 2xy + 2y^2 = \\ &= x^2 + y^2 + (x + y)^2, \end{aligned}$$

amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés: Pozitív n esetére a bebizonyított azonosságnak geometriai jelentést adhatunk, ha (1)-et a következő alakban írjuk:

$$(8) \quad (n + 2)^3 = n^3 + n^2 + (n + 2)^2 + 4(n + 1)^2.$$

Tekintsünk minden tagot egy-egy test térfogata mértékszámának. Így a köbök $n + 2$, ill. n egységnyi élű kockák, a négyzetek pedig hat olyan egységnyi magasságú, négyzetes oszlop térfogatát jelentik, amelyeknek alapéle rendre n , $n + 2$, ill. négy esetben $n + 1$ egység.



Így (8) azt fejezi ki, hogy a nagyobb kocka térfogata egyenlő a további 7 test térfogatának összegével. Ennél többet láthatunk be könnyen: a 7 testből, mindegyiket tömörnek tekintve, hézagtalanul össze is lehet állítani egy a naggyal egybevágó kockát. Fektessük le evégett az „ n^2 -térfogatú” oszlopot, állítsuk rá az „ n^3 ”-kockát úgy, hogy a 4-4 oldallapjuk síkjai egybeessenek, így n egységnyi alapélű, $n + 1$ magasságú O_1 oszlopot kapunk. Állítsuk O_1 köré egy oldallapjukon állva, négyzetlapjukkal O_1 egy-egy oldallapjához zárva a négy $(n + 1)^2$ térfogatú oszlopot úgy, hogy egy-egy oldallapjuk a belső oszlop egy-egy oldallapjának síkjába essék, így $n + 1$ egységnyi magas és $n + 2$ alapélű O_2 oszlopot kapunk. Végül fektessük rá O_2 -re az $(n + 2)^2$ térfogatú oszlopot úgy, hogy oldallapjaik síkjai egybeessenek.