

I. megoldás: A keresett ABC háromszög ($AB = AC$) alakját megszerkeszthetjük annak alapján, hogy a körülírt kör középpontja a feltételnek megfelelő háromszögekben a szimmetriatengely alap felőli negyedelő pontjával esik egybe. Ez így látható be: legyen az alap felezőpontja A_1 , a B -ből húzott magasság (amely átmegy az AA_1 szakasz M felezőpontján) messe AC -t D -ben, az A_1 -ből AC -re bocsátott merőleges talppontja legyen E . Mivel MD az AA_1E háromszögnek, A_1E pedig a BCD háromszögnek középvonala, ezért $AD = DE = EC$. Az AC oldal F felezőpontja tehát DE -t is felezi, így az F -ben AC -re emelt merőleges, – amelynek AA_1 -gyel való metszéspontja a háromszög köré írt kör O középpontja – az A_1EDM derékszögű trapéz középvonala, s így felezi az A_1M szakaszt. Ezzel állításunkat igazoltuk.

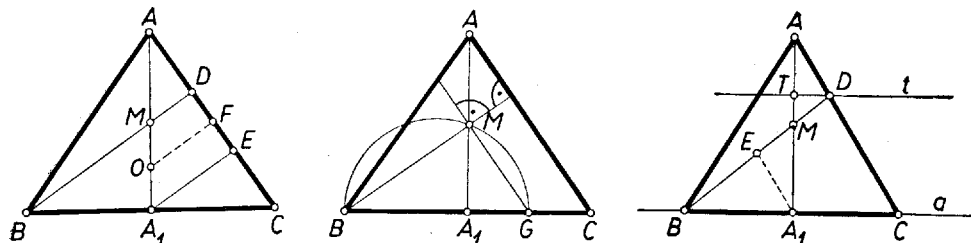
Ennek alapján a keresett háromszöghöz hasonló úgy szerkeszthetünk, hogy tetszőlegesen felvesszük az AA_1 magasságot, ezen megszerkesztjük az M felező- és az O negyedelő pontot. Az O körül OA sugárral írt kör metszi ki az A_1 pontban AA_1 -re állított merőlegeseből a háromszög B és C csúcsát.

Az ABC háromszögnek a kívánt méretre nagyítását pl. úgy végezhetjük, hogy az adott sugárral megrajzoljuk a „hozáírt” kört, majd ehhez az ABC háromszög oldalaiival párhuzamos érintőket úgy szerkesztünk, hogy a kör a keletkezett háromszög alapját és szárainak meghosszabbítását érintse.

Megjegyzés. Ehhez a szerkesztéshez jutunk az Euler-egyenes tulajdonságainak felhasználásával is, de lényegében erre vezet az is, ha felhasználjuk, hogy a magassági pontot az oldalakra tükrözve a tükörkép a körülírt körre esik. Ismeretes ugyanis, hogy a háromszög M magassági pontja, S súlypontja – amely mindhárom súlyvonalnak az oldal felőli harmadolópontja – és körülírt körének O középpontja ebben a sorrendben egy egyenesen, a háromszög Euler-egyenesén van, ami egyenlő szárú háromszögnél egybeesik a szimmetriatengellyel, és $MS = 2SO$. – Második észrevételünk alapján pedig az AA_1 szakasz M felezőpontjának A_1 -re való $\overline{M}$ tükörképét véve $\overline{AM}$ -ben a körülírt kör egy átmérőjét nyertük.

II. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak, és messe az M -en átmenő, AC -vel párhuzamos egyenes BC -t G -ben. Ekkor MG az AA_1C háromszögnek középvonala, így $CG = GA_1$, másrészt MG merőleges MB -re. – Ennek alapján a tetszőlegesen felvett BC alapon megszerkesztjük az A_1 felező és G negyedelő pontot, BG mint átmérő fölé (Thalész-) félkört írunk, ebből az A_1 -ben BC -re emelt merőlegessel kimetsszük M -et, végül A_1 -et M -re tükrözve kapjuk a keresetthez hasonló ABC háromszög hátralevő A csúcsát.

III. megoldás: Legyen egy tetszés szerinti ABC egyenlő szárú háromszögben ($AB = AC$) a BC alap felezőpontja A_1 és az AA_1 szakasz felezőpontja M . Meg fogjuk mutatni, hogy a BM egyenes és az AC oldal D metszéspontjából AA_1 -re bocsátott merőleges T talppontja az AA_1 szakasz A felőli harmadoló pontja, függetlenül a háromszög alakjától. – Ezt tudva a keresett háromszög alakja megszerkeszthető. Egy a egyenes egy A_1 pontjában AA_1 merőlegest szerkesztünk, és megszerkesztjük AA_1 -nek az A felőli T harmadoló pontját. Ekkor az összes olyan ABC egyenlő szárú háromszögekben, amelyeknek alapja az a egyenesen van, az alap végpontjait AA_1 felező pontjával összekötő egyeneseknek a szemközti oldallal való metszéspontja a T -ben AA_1 -re merőlegesen húzott t egyenesen van.



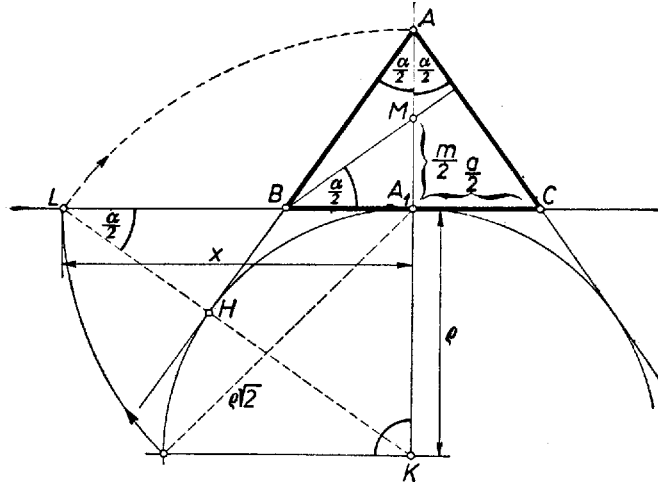
Ennek kell azt a D_0 pontját kikeresnünk, amelyre AD_0 és BD_0 vagy azt, amelyre AD_0 és CD_0 merőlegesek, az ilyen pontokat pedig az AM szakasz mint átmérő fölé rajzolt (Thalész-) kör metszi ki t -ből. Legyen a kör és az egyenes két metszéspontja D_0 és D_0^* ; ezek AA_1 -re szimmetrikusan helyezkednek el, így mindkettőt összekötve A -val és az összekötő egyeneseket meghosszabbítva, amíg a -t metszik (mondjuk B -ben, ill. C -ben) egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ebben a B -t M -mel összekötő egyenes AC -t annak t -vel való metszéspontjában, vagyis D_0^* -ban metszi. Ez rajta van a Thalész-körön is, tehát BD_0^* az AC oldalra bocsátott magasság. Így valóban megszerkesztettük a keresett háromszög alakját – amennyiben a T pontra vonatkozó állításunk igaz.

Ennek igazolására húzzunk A_1 -ből párhuzamost AC -vel, messe ez BD -t E -ben. A_1E a BCD háromszög középvonala, s így E felezi a BD szakaszt. Másrészt EM és MD egyenlő, mert AMD és A_1ME háromszögek megfelelő oldalai, ezek pedig egybevágók, ugyanis AM és A_1M oldaluk egyenlő, M -nél levő szögek csúcsszögek, A -nál és A_1 -nél levő szögek pedig váltószögek. – Ekkor azonban MD a BM szakasz harmadrésze, s így az A_1BM és TDM hasonló derékszögű háromszögekből (az M -nél levő szögek csúcsszögek) nyerjük, hogy TM is harmadrésze A_1M -nek, tehát hatoda AA_1 -nek. Így A_1T kétharmada és AT harmadrésze AA_1 -nek, amint állítottuk.

IV. megoldás. Számítás alapján egy olyan szerkesztést is megadhatunk, amelyben nem szükséges egy hasonló háromszög közbeiktatása.

Jelöljük a háromszög alapját és magasságát a -val, ill. m -mel, az a -val szemközti szögét α -val. Legyen az alapot és a szárak meghosszabbítását érintő körnek középpontja K (az AA_1 magasság, egyben szögfelező meghosszabbításán),

az AB egyenesen levő érintési pontja H és sugara az adott ϱ . Messe a KH egyenes a BC egyenest az L pontban és legyen $A_1L = x$. Ezt az x hosszúságot fogjuk kiszámítani, majd megszerkeszteni.



Merőleges szárú hegyes szögekként $BAA_1 \sphericalangle = KLA_1 \sphericalangle = \alpha/2$ és $CAA_1 \sphericalangle = MBA_1 \sphericalangle = \alpha/2$, ezért a KLA_1 és BAA_1 , valamint CAA_1 és MBA_1 derékszögű háromszögek hasonlóak. A második és az első, ill. a negyedik és az első háromszögből a befogókra:

$$\frac{a}{2} : m = \varrho : x, \quad \text{ill.} \quad \frac{m}{2} : \frac{a}{2} = \varrho : x.$$

E két aránypárból (egyenletből) m -et kiküszöbölve a is kiesik (ez úgy is végrehajtható, hogy a két aránypárt tagról tagra összeszorozzuk és egyszerűsítünk), így x és ϱ között kapunk összefüggést:

$$x^2 = 2\varrho^2,$$

és innen $x = \varrho\sqrt{2}$.

Ennek alapján szerkesztésünk a következő: a ϱ sugarú körhöz tetszés szerinti A_1 pontjában érintőt szerkesztünk, erre A_1 -től mindkét irányban felmérjük $\varrho\sqrt{2}$ -t vagyis a ϱ befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóját. A végpontokat a kör K középpontjával összekötő egyenesek kimetszik a körből a szárak meghosszabbításainak érintési pontjait.

Megjegyzések. 1. A -t a KA_1 félegyenesből $KA = KL$ alapján is kimetszhetjük (a KLA_1 és KAH derékszögű háromszögek egybevágók).

2. Több versenyző lényegében a legutóbbi gondolatmenettel $\alpha/2$ -t határozta meg: helyesen erre jutott: $\tan^2 \alpha/2 = 1/2$, ebből négyzetgyökvonással és trigonometriai táblázattal meghatározta a szöget, és azt szögmérővel felmérte. – Ez az eljárás azonban nem tekinthető (euklidészi) szerkesztésnek.

3. A keresetthez hasonló egyenlő szárú háromszög akkor is megszerkeszthető, ha – a feladattól eltérően – az M magasságpontra felezés helyett valamely más, előírt arányban kell osztania az AA_1 szakaszt. Megoldásaink megfelelő módosítással az $A_1M : MA = 1 : k$ előírás esetén is használhatók, kivéve az I. megoldást, amelyben lényegesen kihasználtuk, hogy $k = 1$ (a hozzáfűzött megjegyzések azonban használhatók). A feladatnak k minden (pozitív) értéke mellett egy és csakis egy megoldása van, és ez áll akkor is minden $k < 1$ -re, ha M -et AA_1 meghosszabbításán kell kapnunk.