

I. megoldás: Ha a kisebbik tényezőt x -szel jelöljük, akkor a másik tényező $x + 6$, és a követelmény szerint

$$(1) \quad x^4 + (x + 6)^4 = 272.$$

Szimmetrikusabbá válik azonban egyenletünk, ha a tényezők számtani közepét választjuk ismeretlennek. Ezt z -vel jelölve a két tényező $z - 3$ és $z + 3$, így

$$(z - 3)^4 + (z + 3)^4 = 272,$$

és rendezve z páratlan kitevős hatványai kiesnek:

$$z^4 + 54z^2 - 55 = 0,$$

vagyis z^2 -ben másodfokú egyenletre jutunk. Ennek gyökei $z_{1,2}^2 = 1$ -ből $z_1 = 1$ és $z_2 = -1$, a másik, $z_{3,4}^2 = -55$ gyökből z_3 és z_4 -re nem kapunk valós értéket. A z_1 gyökhöz tartozó tényezőpár -2 és $+4$, a z_2 -höz tartozó -4 és $+2$, a szorzat mindkét esetben -8 , ez az egyetlen (valós) szám, amely feladatunk követelményeinek megfelelő. Valóban $(-2)^4 + 4^4 = (-4)^4 + 2^4 = 272$.

II. megoldás: Jelöljük a keresett számot n -nel, a feladat szerinti tényezőit x -szel és y -nal. Ekkor, feltéve, hogy $x > y$,

$$(2) \quad x - y = 6,$$

$$(3) \quad xy = n,$$

$$(4) \quad x^4 - y^4 = 272.$$

Innen közvetlenül n -re is kaphatunk egyenletet, ha (3)-at és (4)-et $x(-y) = -n$, $x^4 + (-y)^4 = 272$ alakban írva észrevesszük, hogy egyenleteink bal oldalán x és $-y$ szimmetrikus függvényei állnak. Így (ugyanis várható, hogy a (2)-ből adódó

$$(5) \quad [x + (-y)]^4 = 6^4 = 1296$$

egyenlet bal oldalát, amely szintén szimmetrikus függvénye x és $-y$ -nak, lehet úgy alakítani, hogy benne csak (2), (3) és (4) bal oldala szerepeljen. Valóban, kifejtés után

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 - (x^4 + y^4) - 4(x - y)^2xy - 2(xy)^2 = 1296,$$

tehát

$$272 - 4 \cdot 6^2n - 2n^2 = 1296, \quad n^2 + 72n + 512 = 0,$$

és innen $n_1 = -8$, $n_2 = -64$.

Mint ahogy azonban (2)-ről (5)-re áttérve nem ekvivalens átalakítást végeztünk, ki kell próbálnunk, hogy a kapott számok kielégítik-e a feladat feltételeit. Evégett meg kell határoznunk az x , y tényezőket is. Ezeket (2) és (3)-ból számíthatjuk ki. n_1 -gyel ugyanarra a két tényezőpárra jutunk, mint az I. megoldásban, n_2 -höz pedig nem tartozik (valós) tényezőpár, ezt tehát nem tekinthetjük megoldásnak.

Megjegyzés. A versenyzők többsége *indokolatlanul* feltételezte, hogy a tényezők egész számok, ezekre azután (1), ill. (4)-ben végzett próbálgatással rá is jutott. Volt, aki csak azt tételezte fel, hogy a tényezők racionálisak, és kimutatta, hogy (ebben az esetben) a tényezők egész számok, továbbá, hogy a feladat túlhatározott, amennyiben a (2) egyenlet felesleges, mert 272 csak egyféleképpen írható két egész szám negyedik hatványának összegeként. – Ámde a feladat szerint sem a két tényezőnek, sem magának a keresett szorzatnak nem kell még racionálisnak sem lennie! Tekintsünk két ellenpéldát. (2) és (3)-at változatlanul hagyva legyen pl. a tényezők negyedik hatványainak összege a kitűzött feladattól eltérően: $x^4 + y^4 = 386$; ekkor az előzőhöz hasonló számítással $x = \sqrt[4]{2} + 3$, $y = \sqrt[4]{2} - 3$, $n = -7$ adódik, tehát a keresett szám racionális, de a tényezők irracionálisok. Ha pedig (2) és (3)-at ismét meghagyva $x^4 + y^4 = 200$, akkor $x = \sqrt{\sqrt{748} - 27} + 3$, $y = \sqrt{\sqrt{748} - 27} - 3$, $n = \sqrt{748} - 36$, tehát a tényezőkkel együtt a keresett szám is irracionális.