

A (2) feltételi egyenlőség négyzete alkalmas rendezéssel így írható:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca}\right) = \\ &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{2xyz}{abc} \left(\frac{c}{z} + \frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right). \end{aligned}$$

A második zárójelbeli kifejezésben ráismerünk (1) bal oldalára, amely 0-val egyenlő. Ennek figyelembevételével kapott egyenlőségünk azonos (3)-mal, a bizonyítandó állítással.

Az (1) és (2) feltevéseknek csak úgy van értelmük, ha az a, b, c, x, y, z számok 0-tól különbözők, így pedig az alkalmazott átalakítások megengedett azonos átalakítások voltak.

Megjegyzés. A látottaknál valamivel több ismeret felhasználásával az állítás így is bizonyítható. $x/a, y/b, z/c$ -t u, v, w -vel jelölve ezek 0-tól különböző valós számok, feltételeink szerint

$$(4) \quad u + v + w = 1, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 0, \quad \text{amiből} \quad vw + wu + uv = 0,$$

és $u^2 + v^2 + w^2$ -et kell meghatároznunk. (4) első és harmadik kifejezése együttthatóként szerepel a $T = (t-u)(t-v)(t-w)$ kifejezésnek t hatványai szerint rendezett polinomalakjában, eszerint uvw -t d -vel jelölve

$$(5) \quad T = t^3 - (u + v + w)t^2 + (uv + vw + wu)t - uvw = t^3 - t^2 - d.$$

Hozzuk most két módon polinomalakra a $T^* = (t^2 - u^2)(t^2 - v^2)(t^2 - w^2)$ szorzatot. Egyrészt

$$T^* = (t-u)(t-v)(t-w)[-(-t-u)(-t-v)(-t-w)] = TT',$$

ahol T' annak a kifejezésnek (-1) -szerese, amely T -ből t -nek $-t$ -vel való helyettesítésével áll elő; ennél fogva $T' = -[(-t)^3 - (-t)^2 - d] = t^3 + t^2 + d$, és így $T^* = (t^3 - t^2 - d)(t^3 + t^2 + d) = t^6 - t^4 - 2dt^2 - d^2$.

Másrészt az (5)-höz hasonló kifejtéssel

$$T^* = t^6 - (u^2 + v^2 + w^2)t^4 + (u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2)t^2 - u^2v^2w^2.$$

A két polinomalakból az egyező fokú tagok együttthatóinak összehasonlításából kapjuk a bizonyítandó

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} =\right) u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

egyenlőséget, továbbá leolvashatjuk az

$$(6) \quad \left(\frac{x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{z^2x^2}{c^2a^2} =\right) u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = -2d = -uvw \left(= -2\frac{xyz}{abc}\right)$$

összefüggést is. Ebből az is látszik, hogy u, v, w közül kettő pozitív és egy negatív kell hogy legyen. Ez valóban leolvasható a (4) feltételi egyenletekből is: a második szerint nem lehet mindhárom egyező előjelű; ha pedig kettő, pl. v

és w negatív, akkor az első egyenlet szerint mindkettő abszolút értéke kisebb, mint u -é, tehát $\frac{1}{u}$ kisebb $\left|\frac{1}{v}\right|$ és $\left|\frac{1}{w}\right|$ -nél,

így $\frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ negatív, és ez méginkább áll $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ -re.

A (6) azonosság közvetlenül is nyerhető a feltételi egyenletekből:

$$u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2 = (uv + vw + wu)^2 - 2uvw(u + v + w) = -2uvw.$$