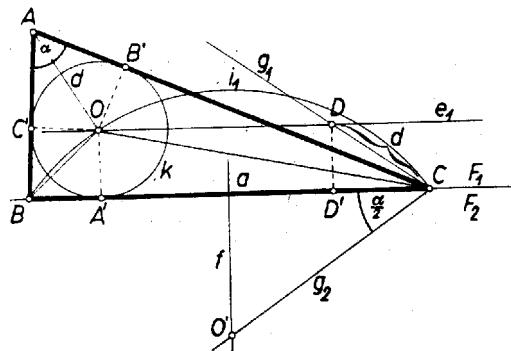


I. megoldás: Gondoljuk a feladatot megoldottnak, legyen a keresett háromszög ABC , ebben $BC = a$, $BAC \sphericalangle = \alpha$ és – O -val a beírt k kör középpontját jelölve $AO = d$ az adott szakasz.



Legyenek továbbá k -nak az oldalakon levő érintési pontjai A' , B' , C' és sugara ρ . Az OBC háromszögben

$$COB_{\triangleleft} = 180^{\circ} - OBC_{\triangleleft} - OCB_{\triangleleft} = 180^{\circ} - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^{\circ} + \frac{180^{\circ} - \beta - \gamma}{2} = 90^{\circ} + \frac{\alpha}{2}.$$

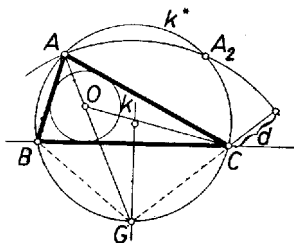
Eszerint O csak azon az i_1, i_2 körívpáron lehet, amelynek (B és C -től különböző) pontjaiból az adott BC szakasz a megszerkeszthető $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szögben látható. Másrészt megszerkeszthetjük $OB' = \varrho$ -t, mert az AOB' derékszögű háromszög alakját a d átfogó és az $\alpha/2$ hegyesszög meghatározza, – és ezzel még egy mértani helyet kapunk O -ra, ugyanis O csak a BC -től ρ távolságban fekvő e_1, e_2 párhuzamos egyeneseken lehet.

Ezek alapján a szerkesztés a következő. Felvesszük a $BC = a$ szakaszt és kijelöljük, hogy a háromszöget a BC egyenessel létrejött F_1 és F_2 félélikok közül F_1 -en kívánjuk kapni. F_1 -en fekszik O is, elég lesz tehát az i_1 -et és e_1 -et megszerkesztenünk. CB -re a C csúcsban mindkét félélikon felmásoljuk az $\alpha/2$ szöveget, a szárak g_1, g_2 , megszerkesztjük BC -nek f felező merőlegesét, majd g_2 és f -nek O' metszéspontja körül $O'B = O'C$ sugárral megrajzoljuk i_1 -et. e_1 -et pedig úgy kapjuk, hogy g_1 -re C -ből felmérjük d -t, és ennek D végpontján át BC -vel párhuzamost húzunk. i_1 és e_1 közös pontja O , ennek vetülete BC -re A' és $OA' = \varrho$, ezek alapján megrajzoljuk a k kört. Most már az A csúcsot a B és C -ből k -hoz húzott második érintők metszéspontja adja. (Ezek céljára C' , B' -t a B körül BA' , ill. C körül CA' sugárral írt körrel metszhetjük ki.)

Szerkesztésünk helyes, mert a BCO' egyenlő szárú háromszög O' -nél levő szöge kétszerese $\alpha/2$ pótszögének, azaz $180^\circ - \alpha$, ez egyben a O' középpont körül $O'B$ sugárral írt kör F_1 -beli i_1 ívéhez tartozó középponti szög. Így a kör F_2 -beli ívéhez $180^\circ + \alpha$ nagyságú középponti szög tartozik, tehát a BOC kerületi szög ennek fele: $90^\circ + \alpha/2$. Most már a $C'BC$ és $B'CB$ szögek összege kétszerese az OBC és OCB szögek összegének, a BOC szög kiegészítő szögének, $90^\circ - \alpha/2$ -nek, azaz $180^\circ - \alpha$ -val egyenlő, tehát a szerkesztett érintők A -nál valóban α szöget zárnak be (az a szögük ekkora, amelynek terében a BC szakasz van). AO felezi az A -ból k -hoz húzott érintők szögét, ezért $OAB' \sphericalangle = \alpha/2 = DCB \sphericalangle$, továbbá D -nek BC -n levő vetületét D' -vel jelölve az AOB' és CDD' derékszögű háromszögekben $OB' = OA' = DD'$, így e két háromszög egybevágó, tehát $AO = CD = d$.

A szerkesztés lépései O előkészítéséig egyértelműen végrehajthatók (α nyilván 0° és 180° közti szög, így fele hegyesszög). i_1 és e_1 közös pontjainak száma szerint O -ra 2, 1, 0 pontot kapunk, és ezekből ugyanennyi háromszöget, mert a további lépések ismét egyértelműek. Ha 2 megoldás adódik, ezek egybevágók, mert egymásnak f -re nézve tükrös párjai, így a feladatnak lényegében legfeljebb 1 megoldása van.

II. megoldás: Az adott α szög az a oldal látószöge az A csúcsból, ennek alapján ismert módon megszerkeszthetjük a keresett háromszög k^* körülírt körét.

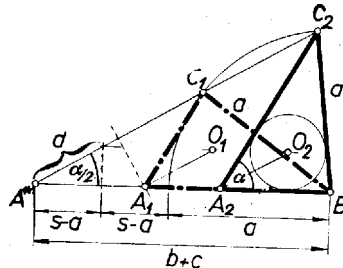


A *BAC* szög *AO* felezője k^* -ot másodszor az *A*-t nem tartalmazó *BC* ívnek *G* felezőpontjában metszi, mert a kerületi szögek tétele szerint $GBC \sphericalangle = GAC \sphericalangle = GAB \sphericalangle = GCB \sphericalangle = \alpha/2$, tehát a *BCG* háromszögben $GB = GC$, és e húrokhoz egyenlő ívek tartoznak. Másrészt *CO* felezi az *ACB* szöget, ezért az *OCG* háromszögben $OCG \sphericalangle = (\gamma + \alpha)/2$. Ekkora a *COG* szög is, mint az *ACO* háromszög külső szöge, tehát a *COG* háromszög egyenlő szárú: $OG = CG$. Így *A*-nak *G*-től való távolsága $AG = AO + OG = d + CG$.

Ezek alapján a szerkesztés a következő. k^* -ban a BC -re merőleges átmérőnek az a végpontja G , ahonnan BC látószöge $180^\circ - \alpha$. (Ez is mutatja, hogy G azonos az I. megoldásban használt O' -vel.) A GC szakasznak C -n túli

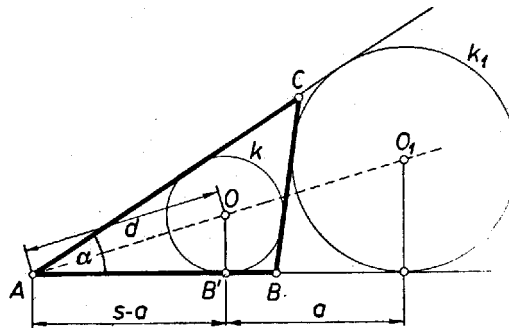
meghosszabbítására rámérjük d -t. A G körül $d + CG$ sugárral leírt kör k^* -ból kimetszi A -t. Aszerint, hogy a $d + CG$ szakasz kisebb, ill. nagyobb k^* átmérőjénél, ill. éppen egyenlő vele, 2, 0, ill. 1 megoldást kapunk. – Szerkesztésünk helyessége bizonyításul csak azt kell megmutatnunk, hogy a kapott A pontot G -vel összekötő szakasznak A -tól d távolságra, azaz G -től CG távolságra fekvő O^* pontja azonos az ABC háromszögbe írt kör középpontjával. Valóban, a CGO^* háromszög egyenlő szárú, és benne $CGO^* \sphericalangle = CBA \sphericalangle = \beta$, így $O^*CG \sphericalangle = 90^\circ - \beta/2$, ennélfogva $O^*CB \sphericalangle = O^*CG \sphericalangle - BCG \sphericalangle = O^*CG \sphericalangle - \alpha/2 = 90^\circ - (\alpha + \beta)/2 = \gamma/2$, vagyis O^*C felezi a C -nél fekvő szöget. Másrészt O^* az A -nál fekvő szög felezőjén is rajta van, tehát $O^* = O$.

III. megoldás: Az előbbi AOB' háromszöggel egybevágó háromszöget szerkesztve megkapjuk AB' -t, az A -ból k -hoz húzható érintőszakaszt. Erről ismeretes, hogy egyenlő $s - a$ -val, ahol s a háromszög kerületének fele. Ebből (a szokásos jelölésekkel) $b + c = 2s - a = 2(s - a) + a$ alapján előállíthatjuk az A csúsból kiinduló oldalak összegét, ezzel pedig a feladatot visszavezettük a háromszögnek az $a, b + c, \alpha$ adathármasból való ismert szerkesztésére: az A^* csúcsú $\alpha/2$ szög egyik szárára felmérjük $b + c$ -t, ennek B végpontjából a sugarú körívvel a másik szárból kimetszünk C -t, majd A^*C felező merőlegesével az első szárból A -t.



A körívnek a szög szárával 2, 1, 0 közös pontja, egyszersmind ennyi megoldás van. Két metszéspont esetén mindkettő A^* -nak ugyanazon oldalára esik (különben $a > b + c$ volna), ezért A_1 és A_2 az A^*B szakaszra esnek. Az így adódó A_1BC_1 és A_2C_2B háromszögek egybevágók. Ugyanis az $A^*C_1A_1$ és $A^*C_2A_2$ egyenlő szárú háromszögek külső szögeként $C_1A_1B \sphericalangle = C_2A_2B \sphericalangle = \alpha$, másrészt $A^*C_1A_1 \sphericalangle = A^*C_2A_2 \sphericalangle = \alpha/2$. $C_1BA_1 \sphericalangle = \varepsilon$ jelöléssel $BC_1A_1 \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - \varepsilon$, így $C_2C_1B \sphericalangle = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \varepsilon) - \alpha/2 = \varepsilon + \alpha/2$. Ámde a BC_1C_2 háromszög egyenlő szárú, ezért $C_1C_2B \sphericalangle = \varepsilon + \alpha/2$, tehát $A_2C_2B \sphericalangle = \varepsilon$. Így a kérdéses háromszögek egy oldalban és két megfelelő szögben megegyeznek, valóban egybevágók.

IV. megoldás: α és d ismeretében megszerkeszthető O, k és α szárainak az érintési pontig terjedő szakasza: $s - a$. Ezzel egyúttal $(s - a) + a = s$ is ismert, a csúctól ekkora távolságban érinti α szárait az a oldalt kívülről érintő k_1 hozzáírt kör, így ez is megszerkeszthető.



Most már k és k_1 közös belső érintőinek az α szög szárai közé eső szakasza az a oldal.