

Olyan  $a, b, c$  természetes számokból álló hármast kell keresnünk, amelyre

$$(1) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Feltehetjük, hogy  $a$  a legkisebb,  $c$  a legnagyobb nevező a hármásban (egyenlőség persze nincs kizárva), vagyis

$$(2) \quad (0 <) a \leq b \leq c.$$

Eszerint reciprok értékeik közül  $1/a$  a legnagyobb és  $1/c$  a legkisebb:

$$(3) \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c} (> 0).$$

Tájékozódjunk  $a$  nagyságáról. Evégett (1) jobb oldalán a második és harmadik tagot (3) alapján előbb a nem kisebb  $1/a$ -val, majd a biztosan kisebb  $0$ -val helyettesítjük; így olyan két egyismeretlenes egyenlőtlenséget kapunk, melyeknek  $1/a$  a nagyobb, ill. a kisebb oldalán áll:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\leq \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = \frac{3}{a}, & \text{innen} & \quad a \leq \frac{24}{5} < 5, \\ \frac{5}{8} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &> \frac{1}{a}, & \text{innen} & \quad a > \frac{8}{5} > 1. \end{aligned}$$

Ezek szerint  $a$ -ra három lehetőség van:  $a = 2$ ,  $a = 3$ , vagy  $a = 4$ .

1. Keressünk először  $a = 4$ -hez megfelelő  $b$ -t és  $c$ -t. (1)-ből

$$(4) \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

A fenti meggondolás első felét  $b$ -re ismételve (3) alapján

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}, \quad \text{tehát} \quad b \leq \frac{16}{3} (< 6).$$

Másrészt most (2) szerint  $b$  is legalább 4, tehát  $b = 4$ , vagy  $b = 5$ . Ezekkel (4)-ből  $c = 8$ , ill.  $c = 40/7$  adódik, de az utóbbi nem egész szám. – Eszerint  $a = 4$  mellett egy felbontást kapunk:

$$(1) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$$

2. Legyen most  $a = 3$ . Ekkor (1) így alakul

$$(5) \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} - \frac{1}{3} = \frac{7}{24},$$

innen a fentiekhez hasonlóan

$$\frac{7}{24} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b}, \quad \text{tehát} \quad b \leq \frac{48}{7} < 7,$$

eszerint most  $a = 3$ ,  $4$ ,  $5$  és  $6$  lehetőségek jönnek szóba. A megfelelő  $c$ -értékek (5)-ből:  $c = -24$ ,  $c = 24$ ,  $c = 120/11$ , ill.  $c = 8$ . Csak a második és a negyedik érték természetes szám, így két felbontást kapunk:

$$(II, III) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}.$$

3. Végül az  $a = 2$  esetben (1)-ből

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Itt alkalmas átalakítással közvetlenül áttekinthetjük az összes  $b, c$  értékpárokat. Távolítsuk el a törtet, gyűjtsünk minden tagot az egyenlet jobb oldalára, és igyekezzünk a kifejezést szorzattá alakítani:

$$8b + 8c = bc, \quad 0 = bc - 8b - 8c = (b - 8)(c - 8) - 64.$$

Eszerint 64-et kell minden lehető módon két egész tényezőre bontani. A tényezőkre (2) folytán  $b - 8 \leq c - 8$ , másrészt nem lehet a két tényező negatív, mert akkor a kisebbre  $b - 8 \leq -8$ ,  $b \leq 0$  adódnék. Így a lehetséges felbontások:

$$\begin{aligned} b - 8 &= 1, \quad 2, \quad 4, \quad 8, \\ c - 8 &= 64, 32, 16, 8, \end{aligned}$$

és ezekből a következő felbontások adódnak:

$$(IV-VII) \quad \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{72} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}.$$

Mindezek szerint 5/8-ra az előírt alakban a fenti hét (I)–(VII) felbontás lehetséges.

*Megjegyzés.* Az  $a = 3$  esetben adódott

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24}$$

felbontás mutatja, hogy ha elejtjük a pozitívság követelményét, akkor a feladatnak több megoldása van. A fentihez hasonló gondolatmenettel további 6 ilyen felbontást találunk:

$$\begin{aligned} \frac{5}{8} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} - \frac{1}{56} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}; \\ \frac{5}{8} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{1}{1} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$