

I. megoldás:

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 = 1 + 3 \cdot \frac{x}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27}.$$

Mivel x pozitív, ezért a jobb oldal minden tagja pozitív. Elhagyva az utolsó két tagot, a jobb oldal kisebbé válik:

$$(2) \quad \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 > 1 + x.$$

Innen mind a két oldalból köbgyököt vonva a bizonyítandó állításra jutunk.

Meg kell még mutatnunk, hogy (2)-ről (1)-re következtetve nem követünk el hibát, vagyis a köbgyökvonás helyes bizonyítási lépés. Bizonyítjuk, hogy ha tetszőleges szerinti a^3, b^3 számokra

$$a^3 > b^3,$$

azaz

$$(3) \quad a^3 - b^3 > 0,$$

akkor

$$(4) \quad a > b,$$

azaz

$$a - b > 0.$$

Ugyanis (3) bal oldalát tényezőkre bontva nyerjük, hogy

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b) \left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right] > 0.$$

Mivel $a - b$ -nek az utolsó alakbeli szorzója pozitív, egyenlőtlenségünk helyes marad, ha avval osztjuk. Ezzel éppen a bizonyítandó (4) egyenlőtlenségre jutunk.

Megjegyzés. A kérdéses szorzó 0 is lehet, ti. ha egyszerre fennáll $a + b/2 = 0$ és $b = 0$. Ezekből azonban ellentétbe jutunk feltevésünkkel, ugyanis $a = -b/2 = 0$ és így $a^3 = b^3 (= 0)$.

II. megoldás: Akárhány $x_1, x_2, \dots, x_n$ szám számtani közepén értjük az $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ számot, mértani közepén pedig az $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ számot. Általánosan is igaz a következő, $n = 2$ esetre közismert egyenlőtlenség: Ha az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok mindegyike pozitív, akkor a mértani közepük nem nagyobb, mint a számtani közepük. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.¹ Legyen most $n = 3$, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 1 + x$, ekkor feltevésünknel fogva $x_3 > x_1$, és így a hivatkozott tétel alapján

$$\frac{1 + 1 + 1 + x}{3} > \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1 + x)},$$

ami bizonyítandó volt.

Megjegyzések. Eszerint tételünk már $x > -1$ -től kezdve fennáll, mert már ekkor teljesül $x_3 = 1 + x > 0$, kivéve mégis az $x = 0$ esetet, amikor a két oldal egyenlő.

A bizonyítandó állítás más irányú általánosítása: Legyen $x > -1$, $x \neq 0$ és $n > 1$, egész szám, ekkor

$$1 + \frac{x}{n} > \sqrt[n]{1 + x}.$$

Mind a két általánosításra rámutatott dolgozatában *Bollobás Béla*.

Meg lehet mutatni, hogy a szóban forgó egyenlőtlenségnek az $x > -9$, $x \neq 0$ számok tesznek eleget.

¹Bizonyítását lásd pl. *Kürschák – Hajós – Neukomm – Surányi*: Matematikai Versenytételek I. 111. o.