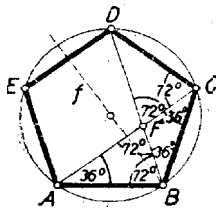


I. megoldás: Legyen az $ABCDE$ szabályos ötszög AC és BD átlóinak metszéspontja F . Az $AF = AB$ egyenlőséget abból mutatjuk meg, hogy az ABF háromszögnek BF -en fekvő két szöge egyenlő (1. ábra).



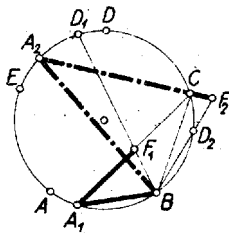
1. ábra

Minden (konvex) ötszög szögeinek összege $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. A szabályos ötszög szögei egyenlők, így egy-egy szöge 108° . Az ötszög köré írható körből az oldalak, mint egyenlő húrok, egyenlő íveket metszenek le. Az ötszög mindegyik szögének szárai között három ilyen ív fekszik, ezért mindegyik ív az ötszög csúcaiból $108^\circ : 3 = 36^\circ$ -nyi szögben látható. Eszerint $\angle BAF = \angle BAC = 36^\circ$, $\angle ABF = \angle ABD = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$, így $\angle AFB = 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ) = 72^\circ = \angle ABF$, amit bizonyítani akartunk.

Az AF szakasz az AC átlónak nagyobbik darabja: $AF > FC$, mert az ABF háromszögben AF , az egyik 72° -os szöggel szemben fekvő oldal, nagyobb BF -nél, a 36° -os szöggel szemben fekvő oldalnál, BF pedig egyenlő FC -vel, mert a BCF háromszög – két 36° -os szöge révén – ugyancsak egyenlő szárú.

Hasonlóan látható be, hogy $DF = DC$, és hogy $DF > FB$. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

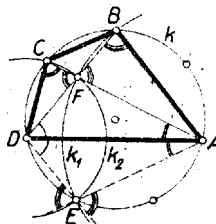
Megjegyzések. 1. A bizonyítás első része csak azt használta fel, hogy a (rövidebb) BC ív egy, és hogy a (rövidebb) DA ív két ötödrésze a kör kerületének. Eszerint az $AF = AB$ egyenlőség érvényes marad akkor is, ha a DA ívet a körön elforgatjuk (2. ábra). – Vegyük észre, hogy az E csúcs a bizonyítás egyik részében sem szerepel.



2. ábra

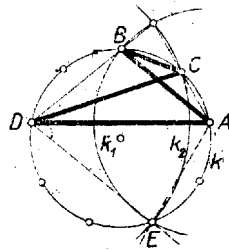
2. Az $\angle AFB = \angle ABF$ egyenlőséget a mértékszámok kiszámítása nélkül is megmutathatjuk. Az $\angle ABD$ szög két ötszögszöghez tartozó íven nyugvó kerületi szög, a $\angle CBD$ és $\angle ACB$ kerületi szögek pedig egy-egy ilyen íven nyugszanak. Így az utóbbiak összege egyenlő az $\angle ABD$ szöggel, másrészt ez az összeg a BCF háromszög külső szögeként a $\angle BFA$ szöggel is egyenlő. – Itt viszont csak azt használtuk fel, hogy az $ABCD$ húrnégyszög oldalai által lemetszett körívekre fennáll az $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{AD}$ egyenlőség. Tehát tulajdonképpen a következő általánosabb tételt bizonyítottuk be: ha az $ABCD$ húrnégyszögben fennáll az $\widehat{AB} + \widehat{CD} = \widehat{AD}$ egyenlőség, akkor $AF = AB$ és $DF = DC$, ahol F az AC és BD átlók metszéspontja. (Mindkét átlónak van egy oldallal egyenlő darabja, ahogyan az eredeti tétel is állítja.)

Ennek a tételnek egy más bizonyítása: az A körül AB sugárral írt k_1 körnek az $ABCD$ négyszög k körülírt körével való második közös pontját E -vel jelölve (3. ábra) $\widehat{DE} = \widehat{AD} - \widehat{AE} = \widehat{AD} - \widehat{AB} = \widehat{DC}$, tehát a D körül DC sugárral írt k_2 kör szintén E -ben metszi k -t.



3. ábra

Így $\angle EDA = \angle BDA = \angle FDA$ és $\angle EAD = \angle CAD = \angle FAD$, tehát az AE egyenes az AF -nek, DE a DF -nek tükörképe AD -re, vagyis E az F tükörképe AD -re. Eszerint $AF = AE = AB$ és $DF = DE = DC$; egyszersmind F a k_1 és k_2 -nek második közös pontja. (Az E pont megfelel a szabályos ötszög ötödik csúcsának.) – Az állítás hurkolt négyszögre is érvényes, hacsak B és C a k ugyanazon AD ívének pontjai (4. ábra; a 3-4. ábrákon A, B, C, D egy-egy szabályos 7-, ill. 9-szög csúcsai közül valók).



4. ábra

II. megoldás: A kívánt egyenlőséget abból bizonyítjuk, hogy az $AFDE$ négyszög paralelogramma. Az I. megoldás szerint a CDE szög 108° , a DCA szög 72° , egymásnak kiegészítő szögei. Ámde tudjuk, hogy ha két szög egymást 180° -ra egészíti ki, és egyik pár száruk párhuzamos – vagy egybeeső –, második száraikba pedig az elsőkből ellentétes irányú forgással jutunk – amint az említett szögek közös CD szárából DE -be negatív (az óramutató forgásával egyenlő irányú) forgás visz át, CA -ba pedig pozitív –, akkor a második szárak – itt DE és AC – szintén párhuzamosak. Ugyanígy a BD átló párhuzamos az AE oldallal. Az így létrejövő $AFDE$ paralelogrammából $AF = ED$ és $DE = AE$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. Számos versenyző szemlélet alapján elfogadta, hogy a szabályos ötszög mindegyik átlója párhuzamos egy oldallal, vagy más szóval, hogy pl. az $ACDE$ négyszög trapéz. Ezt valamivel indokolni kellett volna. Lehet így is: az ED oldal f felező merőlegese szimmetriatengelye az ötszögnek, tehát A és C egymásnak tükörképei f -re. Ezért AC merőleges f -re, és így párhuzamos ED -vel.