

I. megoldás: A feladat feltételei szerint a , b és c ugyan ismeretlenek, de fennállnak köztük bizonyos (ismertnek feltételezett) m és n értékkel az

$$a = \frac{b+c}{m}, \quad b = \frac{c+a}{n}$$

összefüggések, és meg kell határozni az $a+b$ arányát c -hez. E célból kíséreljük meg a -t és b -t kifejezni c -vel. Az egyenleteket így írhatjuk:

$$(1) \quad ma - b = c, \quad -a + nb = c.$$

Innen b -t, illetőleg a -t kiküszöbölhetjük, ha az első egyenlet n -szeresét a másodikhoz adjuk, illetőleg az első egyenletet a második m -szereséhez adjuk:

$$(2) \quad (mn-1)a = (n+1)c, \quad (mn-1)b = (m+1)c$$

e kettő összegéből, ha $mn \neq 1$, a keresett arány

$$\frac{a+b}{c} = \frac{m+n+2}{mn-1}.$$

Ha $mn = 1$, de m és n közül valamelyik nem -1 , akkor a (2) egyenletekből következik, hogy $c = 0$, s így ez esetben a kérdésnek nincs értelme.

Ha végül $m = n = -1$, akkor mindkét (1) alatti egyenlet az

$$a + b + c = 0$$

egyenletbe megy át, és innen, ha $c \neq 0$,

$$\frac{a+b}{c} = -1$$

adódik.

Megjegyzés. A feladat megoldását az tette lehetővé, hogy az a , b , c ismeretlenekre csak két elsőfokú egyenlet áll fenn, és ezekben nem fordul elő az ismeretlen nem tartalmazó tag. – Az ilyen egyenleteket homogén elsőfokú egyenleteknek szokás nevezni. – Egy ilyen egyenletekből álló egyenletrendszernek mindig megoldása a csupa 0-ból álló értékrendszer. Ha van ettől különböző megoldás (és esetünkben van, mert kevesebb az egyenlet, mint az ismeretlenek száma), akkor az egyenletrendszer legfeljebb valamelyik ismeretlennek a többihez való arányait határozza meg (ezt sem föltétlenül egyértelműen). Esetünkben pl. lényegében az $\frac{a}{c}$ és $\frac{b}{c}$ arányokat határoztuk meg.

II. megoldás: Jelöljük a keresett arányt x -szel, akkor m , n és x között keresünk egy (a -tól, b -től és c -től független) összefüggést. Ha ez sikerül, abból x -et már kifejezhetjük. Az m , n és x -re fennáll

$$(1) \quad m = \frac{b+c}{a}, \quad n = \frac{c+a}{b}, \quad x = \frac{a+b}{c}.$$

Az egyenletek szimmetriáját a , b és c -ben még világosabbá tehetjük, ha mindegyik egyenlőséghez hozzáadunk 1-et:

$$m+1 = \frac{a+b+c}{a}, \quad n+1 = \frac{a+b+c}{b}, \quad x+1 = \frac{a+b+c}{c}.$$

Innen, ha m , n és x egyike sem -1 , akkor

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1,$$

amiből x -re az

$$x = \frac{m+n+2}{mn-1}$$

érték adódik, ha $mn \neq 1$.

Ha $mn = 1$, akkor az (1) alatti első két egyenlet szorzatából

$$1 = \frac{ab + c(a+b) + c^2}{ab} = 1 + \frac{c(a+b+c)}{ab}$$

Innen, mivel feltettük, hogy a , b , c egyike sem 0, következik, hogy

$$(2) \quad a + b + c = 0,$$

s így

$$m = n = x = -1.$$

Ugyancsak a (2) egyenlethez jutunk, ha m , n és x közül csak egyről tesszük fel, hogy értéke -1 .