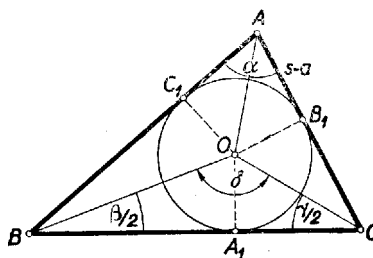


I. megoldás: Legyenek a háromszög csúcsai A, B, C , az ezeknél fekvő szögek α, β, γ . Mivel a beírt kör O középpontját a szögfelező metszéspontja adja, ezért az $a = BC$ oldal látószöge az O pontból (3. ábra)



3. ábra

$$(1) \quad \delta = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

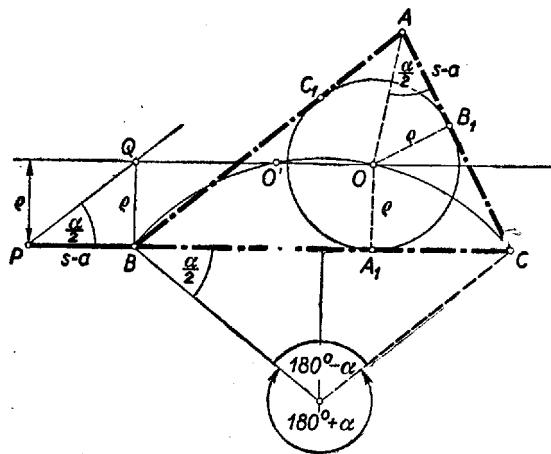
Ez a szög tehát α ismeretében megszerkeszthető. Azt is tudjuk, hogy O a BC oldaltól ϱ távolságra van, így a szerkesztés elvégezhető, ha a -t meg tudjuk szerkeszteni. Legyenek a beírt kör érintési pontjai a BC , CA , AB oldalon A_1 , B_1 , C_1 , akkor ismeretes, hogy

$$(2) \quad AB_1 = AC_1 = s - BC = s - a.$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintő egyenlő volta miatt

$$s = AB_1 + BC_1 + CA_1 = AB_1 + CA_1 + A_1B = AB_1 + a.)$$

Ezzel a következő szerkesztéshez jutottunk: Rajzoljunk $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szöget, csúspontját jelöljük P -vel (4. ábra).



4. ábra

Húzzunk az egyik szárával párhuzamos egyenest ϱ távolságban, amely metszi a másik szarat egy Q pontban. Az előbbi szárra mérjük rá a P csúctól a $PC = s$ távolságot, a Q -ból PC -re bocsátott merőleges talppontja legyen B . Rajzoljuk meg azt a körívet, amelyből a BC szakasz $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik. Messe ez az először húzott párhuzamos O és O' pontokban. Rajzoljunk pl. O körül ϱ sugarú kört. Az ehhez B -ből és C -ből húzott érintők A metszéspontja lesz a keresett háromszög harmadik csúcspontja. (E két érintő szükségképpen metszi egymást, a BC ugyanazon az oldalán, amelyen a kör van. Ugyanis ezen érintőknek a BC szakasszal bezárt, a kör oldalán fekvő szögei $2 \cdot OBC \angle$, illetőleg $2 \cdot OCB \angle$, és e két szög összege $180^\circ - \alpha$.)

Csak az így kapott háromszög felelhet meg a feladat feltételeinek, tehát nincs megoldása a feladatnak, ha a látókörív nem metszi a ρ távolságban húzott párhuzamost.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert beírt körének sugara ϱ , ennek a középpontjából a BC oldal $90 + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik, s így az A csúsnál fekvő α' szögre (1) szerint

$$90^\circ + \frac{\alpha'}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}, \quad \alpha' = \alpha.$$

Végül a beírt kör érintési pontját a CA oldalon B_1 -gyel jelölve, a szerkesztett háromszög s' kerületére (2) szerint

$$s' = AB_1 + BC.$$

De az AOB_1 és PQB derékszögű háromszögek egybevágók, mert A -nál, illetőleg P -nél fekvő hegyesszögük $\frac{\alpha}{2}$, és az ezzel szemközti befogó mindkét háromszögben q . Így

$$AB_1 = PB.$$

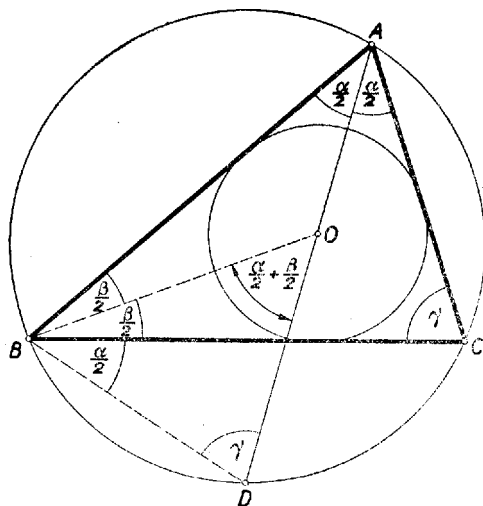
Ennélfogva

$$s' = PB + BC = s$$

a szerkesztés szerint.

Ha O helyett az O' -ből kiindulva fejezzük be a szerkesztést, akkor ABC -vel egybevágó megoldást kapunk, mert O és O' szimmetrikus a BC szakaszt felező merőlegesére.

Megjegyzés. Legyen az ABC háromszög köré írt kör A -t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja D (5. ábra).



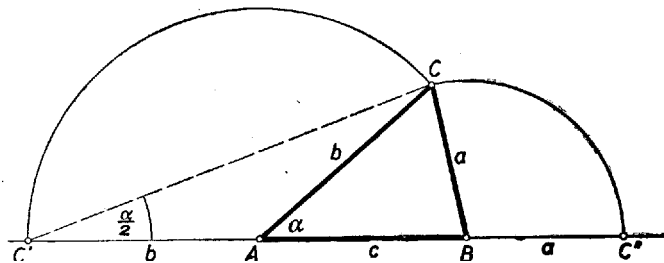
5. ábra

Tudjuk, hogy az A csúcsnál fekvő szög felezője átmegy D -n, és egyszerű szögszámítás adja, hogy a BDO háromszög egyenlő szárú: $DB = DO$. Így B , O és C egy D középpontú körön vannak. Ez éppen a fenti megoldásban használt látókörív.

Mivel a megszerkesztése után, α ismeretében a körülírt kör megszerkeszthető, így a D pont is. E körül B -n és C -n át körívet rajzolva, annak egyik metszéspontját a BC -től q távolságra húzott párhuzamossal kössük össze D -vel. Ez metszi ki a körülírt körből A -t. Többen választották ezt a szerkesztési utat. Ehhez természetesen megfelelően kell módosítani annak bizonyítását is, hogy az ABC háromszög megfelel a feladat feltételeinek. (Lásd a jelen számban kitűzött 372. gyakorlatot.)

II. megoldás: Forgassuk le egy ABC háromszög oldalait pl. az AB oldal meghosszabbítására (6. ábra)

$$AC' = AC, \quad BC' = BC.$$

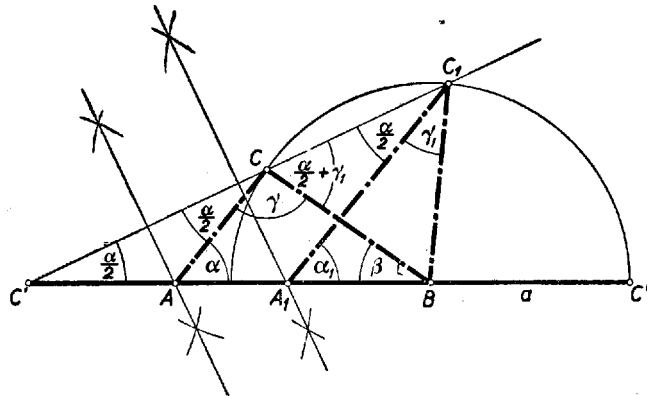


6. ábra

Ha az A csúcsnál levő szög α , akkor a CAC' háromszög egyenlő szárú voltából következik, hogy

$$\angle CAC' = \angle C'CA = \frac{\alpha}{2}.$$

Az előző megoldásban láttuk, hogy a $BC = a$ oldal az adatokból megszerkeszthető, így megszerkeszthető a BCC' háromszög is a következő módon: Miután a -t megszerkesztettük, mint az előző megoldásban, mérjük fel egy egyenesre $C'C'' = 2s$ távolságot, ennek C' végpontjában az $\frac{\alpha}{2}$ szöget, a C'' -től a távolságra levő B pont körül pedig rajzoljunk a sugarú kört (7. ábra).



7. ábra

E körnek a szög másik szárával való valamelyik metszéspontja – ha van ilyen – legyen C . A CC' szakasz felező merőlegese metszi ki a $C'C''$ szakaszból az A pontot.

Az ABC háromszög valóban megfelel a feltételeknek, mert szerkesztés szerint a CAC' háromszög egyenlő szárú, így $CA = C'A$, és a háromszög A -nál levő külső szöge

$$\angle CAC'' = 2 \cdot \angle C'A = \alpha.$$

Ez az ABC háromszög belső szöge kell, hogy legyen. Ugyanis a szerkeszthetőséghez szükséges, hogy $a < s$ legyen. Ez esetben C' az a sugarú B középpontú körön kívül van. Ha a kör és a $C'C$ egyenes másik metszéspontját C_1 -gyel jelöljük, akkor a CC_1 szakasz felező merőlegese B -n megy át; mivel pedig CC' (és C_1C') felezőpontja C' és a C_1C szakasz felezőpontja közé esik, így A -nak is C' és B közé kell esnie. $\angle CAC'' < \alpha$ tehát az ABC háromszögnek valóban belső szöge. A háromszög kerülete:

$$CA + AB + CB = C'A + AB + BC'' = 2s.$$

Így az I. megoldás (1) szerint a beírt kör érintési pontja A -tól $s - a$ távolságra van. Ebből, mivel a beírt kör középpontja az α szög felezőjén van, a megszerkesztése szerint következik, hogy a beírt kör sugara olyan derékszögű háromszög befogója, melynek ezzel szemközti szöge $\frac{\alpha}{2}$, a másik befogója pedig $s - a$. Mivel a -t egy ugyanilyen háromszög segítségével szerkesztettük, melynek emellett kérdéses befogója ρ hosszúságú, így a megszerkesztett háromszög beírt körének sugara ρ . A háromszög tehát megfelel a feladat feltételeinek.

Azt állítjuk, hogy ha C helyett C_1 -ből kiindulva szerkesztünk egy A_1BC_1 háromszöget, ez az előbbivel egybevágó lesz (a megfelelt csúcsok A , C és B). Valóban A_1 is C' és B közé esik. Essék mondjuk a C a C' és C_1 pontok közé, és jelöljük az ABC és A_1BC_1 háromszögek szögeit α , β , γ , illetve α_1 , β_1 , γ_1 -gyel. Szerkesztés szerint $\alpha_1 = \alpha$ a megadott szög.

A BCC_1 egyenlő szárú háromszögből

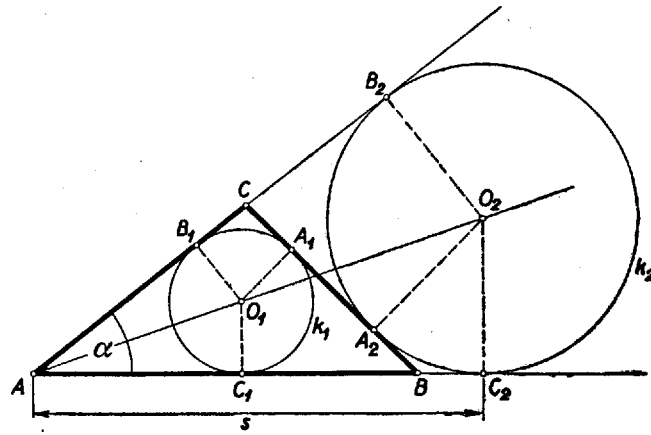
$$\angle BCC_1 = \angle BC_1C = \gamma_1 + \frac{\alpha}{2},$$

így a C -nél keletkező szögek összege

$$180^\circ = \angle C'CA + \angle ACB + \angle BCC_1 = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \gamma_1 + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma + \gamma_1,$$

tehát $\gamma_1 = \beta$. Az ABC és A_1C_1B háromszögek tehát hasonlóak, mivel pedig BC és C_1B oldaluk egyenlő, tehát egybevágók is.

III. megoldás: Rajzoljuk meg a háromszög BC oldalához hozzáírt kört is. A betűzést a 8. ábra mutatja.



8. ábra

Ismeretes, hogy ekkor

$$(3) \quad AB_2 = AC_2 = s.$$

(Valóban a körhöz egy pontból húzott érintők egyenlősége folytán

$$2AB_2 = AB_2 + AC_2 = AC + CA_2 + AB + BA_2 = AC + AB + BC = 2s.)$$

Ez a következő szerkesztéshez vezet: Szerkesszünk α nagyságú szöget, csúcsa legyen A , és szerkesszük meg a két szárát érintő ϱ sugarú k_1 kört. Mérjük rá a szög egyik száraára az $AC_2 = s$ távolságot, és szerkesszük meg azt a k_2 kört, amelyik mindkét szárát érinti, egyiket C_2 -ben. Húzzuk meg a két kör egyik közös belső érintőjét, messe ez a szög szarait B és C pontokban.

ABC a keresett háromszög, mert A -nál levő szöge α , beírt körének sugara ϱ , és a (3) összefüggésből következik, hogy kerülete $2s$.

A másik belső közös érintő meghúzása nyilvánvalóan a megszerkesztetttel egybevágó háromszöghöz vezet.