

Képezzük a két oldal különbségét

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = (ad - bc)^2 \geq 0,$$

a, b, c, d minden számbajövő értékére. Egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha

$$ad = bc.$$

Megjegyzés. 1. A bizonyítás a következő azonosság levezetésével történt:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2.$$

Ebből az itt bizonyított egyenlőtlenség mellett egy számelméleti érdekesség is leolvasható: ha itt a, b, c, d egész számokat jelentenek, akkor az azonosság azt fejezi ki, hogy ha két egész szám kifejezhető két négyzetszám összegeként ($m = a^2 + b^2$ és $n = c^2 + d^2$), akkor a szorzatuknak is megvan ez a tulajdonsága. Ez lényeges segítséget nyújt annak a kérdésnek vizsgálatában, hogy mely számok állíthatók elő két négyzetszám összegeként (lásd idevonatkozóan pl. Matematikai Versenytételek II. részben az 1938. évi 1. feladathoz fűzött jegyzetet).

2. Könnyen igazolható a felhasznált azonosság következő általánosítása:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + \dots + (a_1b_k - a_kb_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + \dots + (a_kb_{k-1} - a_{k-1}b_k)^2,$$

amiből leolvashatjuk az

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_k^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_kb_k)^2$$

nevezetes Cauchy-féle egyenlőtlenséget. Itt egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha a b_i -k a megfelelő a_i -ből minden egyes i -re ugyanazon c számmal való szorzással keletkeznek.