

A vizsgálandó kifejezés

$$n^2(n^4 - 1) = (n^2 - 1)n^2(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)n(n^2 + 1).$$

Ha n egész szám, akkor itt az első három tényező három szomszédos egész szám. Ezek közül valamelyik osztható 3-mal.

Ha n páratlan, akkor az első és harmadik tényező, ha páros, akkor a második és negyedik osztható 2-vel, a szorzat tehát osztható 4-gyel.

Az első három tényező közül valamelyik osztható 5-tel is, ha n osztható 5-tel, vagy szomszédos egy 5-tel osztható számmal. Ha viszont n egy 5-tel osztható szám második szomszédja: $n = 5k + 2$, akkor az utolsó tényező

$$n^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1)$$

osztható 5-tel.

Az $n^6 - n^2$ kifejezés tehát minden egész n -re osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel. Ebből következik, hogy 60-nal is osztható,¹ mert minden szám 60-nal osztva

$$60h + m$$

alakban írható, ahol $0 \leq m < 60$ a maradék. Mivel az első tag osztható 3-mal, 4-gyel és 5-tel, az összeg csak úgy lehet mindhárom számmal osztható, ha m is osztható mind a hárommal.

Csak a 0-ra és 5-re végződő számok oszthatók 5-tel és ezek közül is csak 0-ra végződők lehetnek 4-gyel oszthatók, tehát m lehetséges értéke csak

$$0, 10, 20, 30, 40, 50.$$

Ezek közül csak 0 és 30 osztható 3-mal, de az utóbbi nem osztható 4-gyel, tehát $m = 0$ és így minden 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztható szám osztható 60-nal is. Ezzel bizonyítottuk a tétel állítását.

Megjegyzés. Az, hogy a 3-mal, 4-gyel és 5-tel való oszthatóságtól a szorzatukkal 60-nal való oszthatóságra következtethetünk, azon múlik, hogy e három szám közül semelyik kettőnek nincs 1-nél nagyobb közös osztója. Nem volna nehéz a kifejezés 4-gyel, 5-tel és 6-tal való oszthatóságát kimutatni, ebből sem következtethetnénk $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ -szal való oszthatóságra, amint hogy a kifejezés $n = 2$ -re 60-at ad és ez mindjárt nem osztható 120-szal. Ebbe a hibába többen beleestek, hogy két számmal való oszthatóságból a szorzatukkal való oszthatóságra következtettek, nem törődve a tényezők közös osztóival.

¹Hivatkozhatnánk egyszerűen arra a tételre, hogy ha egy egész szám osztható olyan egész számokkal, amelyek páronként relatív prímek egymáshoz, akkor osztható ezek szorzatával is. A következő megfontolás azonban azt mutatja, hogy ezt konkrétan adott számok esetén könnyű közvetlenül igazolni.