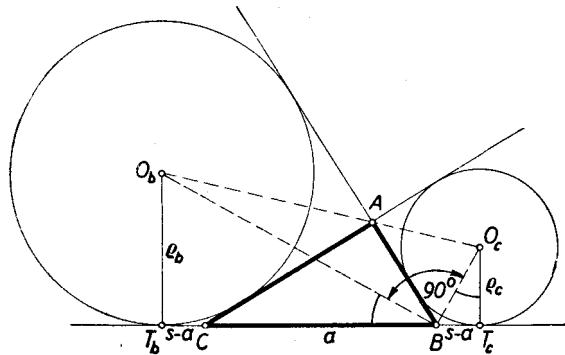


I. megoldás: A feladatot megoldhatjuk számítás segítségével. Jelöljük az érintőkörök középpontját O_b és O_c -vel, érintési pontjukat a BC egyenesen T_b és T_c -vel (5. ábra).



5. ábra

Ismeretes, hogy $BT_b = CT_c = s$, ahol s a háromszög kerületének felét jelenti. B -t összekötve a körközepontokkal tudjuk, hogy BO_b és BO_c a háromszög B -nél levő belső és külső szögfelezői, és így egymásra merőlegesek. Ebből következik, hogy

$$BO_c T_c \sphericalangle = O_b B T_b \sphericalangle,$$

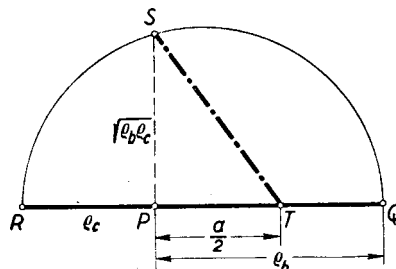
mint merőlegesszerű szögek egyenlők, következőleg $BO_c T_c$ és $O_b B T_b$ háromszögek hasonlóak. A befogók arányát felírva

$$\frac{O_c T_c}{T_c B} = \frac{B T_b}{T_b O_b}, \quad \text{azaz} \quad \frac{\rho_c}{s-a} = \frac{s}{\rho_b}, \quad s^2 - as - \rho_b \rho_c = 0.$$

Innen s -et kiszámítva (a pozitív gyököt véve)

$$s = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \rho_b \rho_c}.$$

Ez a távolság megszerkeszthető; a második tag pl. a következő módon: mérjük fel egy egyenesre közös P pontból ellenkező irányban a $PQ = \rho_b$, $PR = \rho_c$ távolságot (6. ábra).



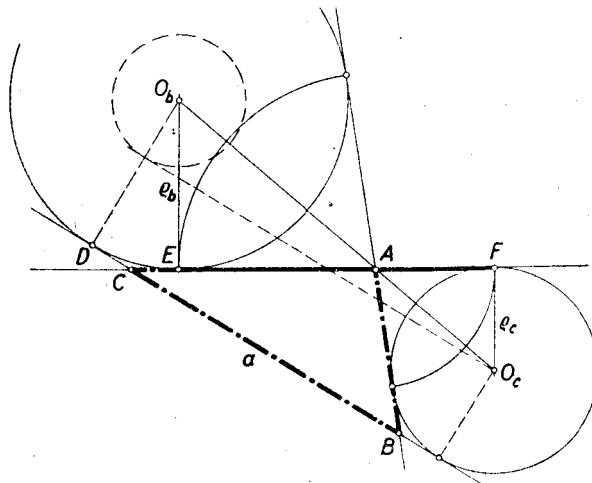
6. ábra

Az egyenesre P -ben emelt merőleges messe a QR , mint átmérő fölé emelt félkört S -ben akkor – mint ismeretes – $PS = \sqrt{\rho_b \rho_c}$. P -ből felmérve a QR egyenesre (bármelyik irányban) a $PT = \frac{a}{2}$ távolságot

$$ST = \sqrt{PT^2 + PS^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \rho_b \rho_c}$$

$s = BT_b = CT_c$, alapján a BC egyenesen megszerkeszthetjük a T_b és T_c pontokat. A többi már triviális.

II. megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használva, ott azt láttuk be, hogy az $O_b O_c$ szakasz a B pontból – és természetesen ugyanúgy a C pontból is – derékszögben látszik. Ezt az előbbinél sokkal egyszerűbben is felhasználhatjuk a háromszög megszerkesztésére. A nyert összefüggés szerint az $O_b O_c$, mint átmérő fölé emelt félkör átmegy B -n és C -n (7. ábra).



9. ábra

Szerkesszük meg a második belső közös érintőt és egy külső közös érintőt. Az érintők zárják közre a kívánt háromszöget. Jelöléseket az ábra szerint választva azt kell igazolnunk, hogy $BC = a$, ez pedig a fenti számoláshoz hasonlóan következik:

$$a = EF = CF - CE = s - CE = DB - DC = CB.$$

Megjegyzés: A helyes megoldók többsége csak bonyolult számításokkal oldotta meg a feladatot.