

**I. megoldás:** Figyeijük meg, hogy páros számot 6-tal szorozva az utolsó számjegy változatlan marad, két egész szám szorzatának utolsó jegyét pedig a tényezők utolsó számjegyei szorzatának az utolsó jegye adja. Így mivel  $2^4$  utolsó jegye 6, tehát  $2^5, 2^9$ , általában tetszés szerinti pozitív egész  $k$ -ra  $2^{4k+1}$  ugyanarra a jegyre végződik mint az első hatvány, vagyis 2-re, hasonlóan  $2^{4p+2}$  utolsó jegye 4,  $2^{4k+3}$ -é 8, végül  $2^{4k}$ -é 6.

Így  $2^n + 1$  akkor és csakis akkor végződik 5-re, ha az  $n$  kitevő  $4k + 2$  alakú,  $2^n - 1$  akkor és csakis akkor, ha  $4k$  alakú a kitevő  $2n$  aszerint  $4k + 2$  alakú, vagy  $4k$  alakú, amint  $n$  páratlan, vagy páros. Így  $2^{2n} + 1$  az első esetben 5-re, a másodikban 7-re végződik. Azt kaptuk tehát, hogy ha a természetes szám, akkor a

$$2^n - 1, \quad 2^n + 1, \quad \text{és} \quad 2^{2n} + 1$$

számok közül az egyik és csakis az egyik osztható mindig 5-tel.

**II. megoldás.**  $2^n - 1$  és  $2^n + 1$  szomszédos páratlan számok, tehát utolsó jegyeik 1 és 3 vagy 3 és 5, vagy 5 és 7, vagy 7 és 9 vagy 9 és 1 lehet. A második és harmadik esetben a feladat állításának helyessége nyilvánvaló. Az ötödik nem fordulhat elő, mert ekkor

$$(2^n - 1) + (2^n + 1) = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

10-zel, tehát 5-tel is osztható volna, ami lehetetlen. A fennmaradó első és negyedik esetben az utolsó jegyek szorzata egyformán 3-ra végződik, tehát  $(2^n - 1)(2^n + 1) = 2^{2n} - 1$  utolsó jegye 3, s így  $(2^{2n} + 1)$ -é 5, tehát ez osztható 5-tel.

**III. megoldás:** Elég megmutatni, hogy a feladatban szereplő három szám szorzata osztható 5-tel, mert 5 prímszám, és prímszámoknak megvan a tulajdonságuk, hogy egész számok egy szorzatának csak úgy lehetnek az osztói, ha osztói valamelyik tényezőnek.<sup>2</sup>

A négy szám szorzata:

$$(2^n - 1)(2^n + 1)(2^{2n} + 1) = (2^{2n} - 1)(2^{2n} + 1) = 2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1$$

mindig osztható  $2^4 - 1 = 15$ -tel, tehát 5-tel is.

Az eredmény mutatja, hogy a három szám valamelyike mindig osztható 3-mal is.

*Jegyzet.* Ez a megoldás világosan mutatja a feladat kapcsolatát az I. forduló 3. feladatával kapcsolatban említett Fermat-féle tétellel.

**IV. megoldás:** Mivel

$$2^{2n} + 1 = 2^{2n} - 4 + 5 = (2^n - 2)(2^n + 2) + 5,$$

így ez a szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha jobboldalon szereplő szorzat osztható 5-tel.

De

$$2^n - 2, \quad 2^n - 1, \quad 2^n, \quad 2^n + 1, \quad 2^n + 2$$

öt egymástitáni egész szám. Tehát közülük egy és csakis egy osztható 5-tel. A középső szám nem osztható 5-tel, tehát a másik négy közt kell 5-tel oszthatónak lennie. Ebből már következik a feladat állításának helyessége.

---

<sup>2</sup>A prímszámoknak ez a nevezetes tulajdonsága semmiképpen sem tekinthető magától értetődőnek. Bizonyításra lásd pl. az előző lábjegyzetben idézett műben a 22. old.