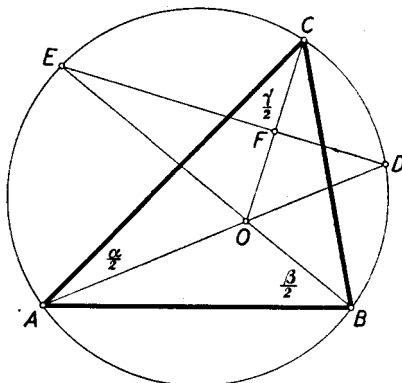


- I. megoldás.** Legyen a C -ből induló szögfelező és DE metszéspontja F , a szögfelezők metszéspontja O . (2. ábra.
– Felhasználjuk tehát azt a tételt, amely szerint a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást.)



2. ábra

Ekkor, mint az $AOC_{\triangle}$ külső szöge

$$\angle COD \equiv \angle FOD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

A kerületi szögek tétele szerint

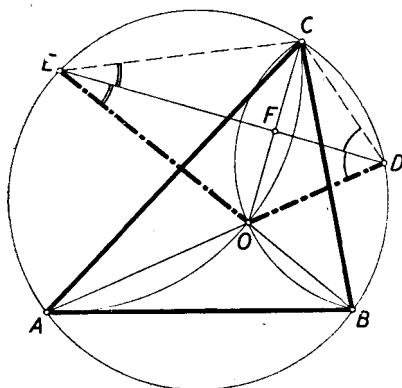
$$\angle ADE \equiv \angle ODF = \frac{\beta}{2}.$$

Így a DFO háromszögből

$$\angle DFO = 180^\circ - (\angle ODF + \angle FOD) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ.$$

DE tehát merőleges a C -ből induló szögfelezőre.

II. megoldás: A D ill. E pont felezi a körülírt körnek a BC , ill. AC oldalak fölötti ívét. Így az egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek egyenlő volta miatt a $CDOE$ négyszögben a DE átló felezi a végpontjainál levő szögeket (3. ábra), tehát szimmetria-tengelye a négyszögnek. (A négyszög deltoid.)



3. ábra

Mivel C és O egymás tükörképei DE -re nézve, azért

$$DE \perp CO,$$

de CO a C -ből induló szögfelező, mert O -n kell átmennie a harmadik szögfelezőnek is.

III. megoldás: A $CDOE$ négyszög deltoid voltát a következőképpen is bizonyíthatjuk:

Ha a B és C pontokat rögzítjük és A végigfut a $\widehat{BEC}$ íven, akkor O annak a körnek BC ívén fut végig, amelynek középpontja D (3. ábra – lásd a tavaly A. D. verseny I. forduló 1. feladatát a K. M. L. 1954 októberi számában). Hasonlóképpen A és C rögzítése és a B pont mozgása esetén O mértani helye az E középpontú AC körív. Tehát

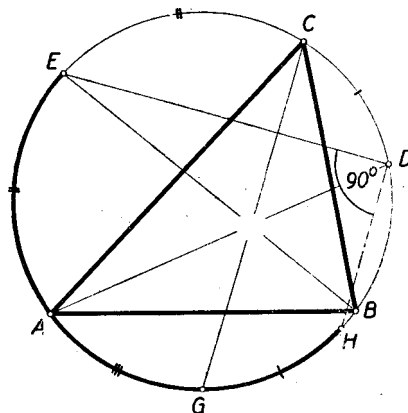
$$DC = DO \quad \text{és} \quad EC = EO,$$

ami bizonyítandó volt.

*

A további megoldások nem használják fel a szögfelezők metszéspontjára vonatkozó tételt.

IV. megoldás. Jelölje G a C -ből húzott szögfelező metszéspontját a körrel (4. ábra).



4. ábra

D , E és G felezik a háromszög oldalai feletti köríveket. Húzzunk D -ből párhuzamost CG -vel. Legyen ennek második metszéspontja a körrel H . Ekkor

$$\widehat{CH} = \widehat{CD},$$

így az $\widehat{EAGH}$ körív a három oldal fölötti körívnek felerészeiből tevődik össze, vagyis félkör.

Ebből következik, hogy

$$\angle EDH = 90^\circ,$$

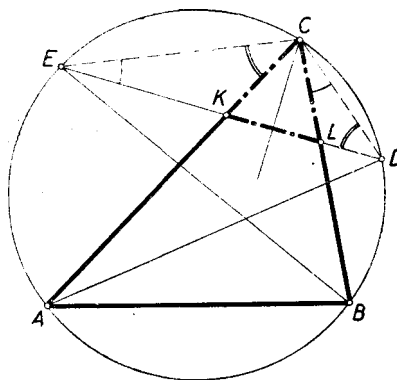
és így a $DH \parallel CG$ összefüggés folytán

$$DE \perp CG.$$

Megjegyzés: Tulajdonképpen azt az általános tételt bizonyítottuk az itt szereplő speciális esetre, hogy két húr szöge akkora, mint a szög és csúcsszögével szemközti ívek összege fölötti kerület szögek a körben. Az itt használt bizonyítás tetszés szerinti húrokra átvihető.

A feladat néhány további megoldása lényegében e tétel más segédvonalak alapján történő bizonyításaiban állt. (Ezeket itt nem közöljük.)

V. megoldás: Messe a DE egyenes az AC és BC oldalt K -ban és L -ben. Több versenyző azt mutatta ki, hogy a CKL háromszög egyenlő szárú. Ebből következik, hogy DE merőleges a C -ből induló szögfelezőre, mert egyenlőszárú háromszögben az alap és a csúcsnál levő szög szögfelezője merőlegesek egymásra.



5. ábra

Az egyenlőszárúság például így látható be egyszerűen: Mivel E felezi az AC körívet, D a BC körívet (5. ábra), azért

$$\angle CED = \angle BCD \quad \text{és} \quad \angle ACE = \angle CDE,$$

mint egyenlő köríveken nyugvó kerületi szögek. Ebből következik, hogy a CKE_Δ és DLC_Δ harmadik szögei is egyenlők, amelyek egyben a CKL_Δ háromszög K -nál és L -nél levő külső szögei.

Így a CKL háromszög egyenlő szárú.

VI. megoldás: Legyen C_0 az AB fölötti C -t tartalmazó körív felezőpontja. Az ABC_0 egyenlőszárú háromszög C_0 -ból induló szögfelezője az ábrának szimmetriatengelye s így az ABC_0 másik két szögfelezőjének, D_0 és E_0 metszéspontjait összekötő egyenes merőleges rá (6. ábra).


$$D_0 E_0 D \triangleleft = E D E_0 \triangleleft = \frac{1}{2} C_0 G C \triangleleft.$$
$$E_0 H E_{\triangleleft} = H E_0 D_{\triangleleft} + H D E_0_{\triangleleft} = C_0 G C_{\triangleleft},$$

vagyis a DE egyenes ugyanakkora szöggel fordult el, mint a C csúcsból induló szögfelező, merőlegességük tehát megmaradt.