

I. megoldás: Jelöljük a keresett kifejezés értékét X -szel. Mivel (2) alapján $A = -(B + C)$, $B = -(A + C)$ és $C = -(A + B)$, azért

$$\begin{aligned} X &= aA^2 + bB^2 + cC^2 = -[aA(B + C) + bB(A + C) + cC(A + B)] = \\ &= -aAB - aAC - bBA - bBC - cCA - cCB = \\ &= -AB(a + b) - BC(b + c) - CA(c + a). \end{aligned}$$

De (1)-ből $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$, és így a keresett

$$X = ABc + aBC + AbC = ABC \left(\frac{a}{A} + \frac{b}{B} + \frac{c}{C} \right).$$

A zárójelben lévő kifejezés értéke (3) alapján 0, tehát

$$X = 0.$$

II. megoldás: Kiindulhatunk az (1)-ből, amely szerint $a = -(b + c)$, $b = -(a + c)$ és $c = -(a + b)$. Tehát

$$\begin{aligned} X &= aA^2 + bB^2 - cC^2 = -(b + c)A^2 - (a + c)B^2 - (a + b)C^2 = \\ &= -a(B^2 + C^2) - b(A^2 + C^2) - c(A^2 + B^2) = \\ &= -a(B + C)^2 - b(A + C)^2 - c(A + B)^2 + 2aBC + 2bAC + 2cAB. \end{aligned}$$

De (3)-ból ABC -vel szorozva (A , B és C nem lehet 0),

$$aBC + bAC + cAB = 0,$$

(2)-ből

$$(B + C)^2 = A^2, \quad (A + C)^2 = B^2, \quad (A + B)^2 = C^2,$$

és így

$$X = -aA^2 - bB^2 - cC^2 = -X,$$

amiből

$$X = 0.$$

III. megoldás: $(A + B + C)(aA + bB + cC) = 0$, mert az első tényező (2) alapján 0. A baloldalt átalakítva és az (1) alatti egyenletet figyelembe véve

$$\begin{aligned} aA^2 + bB^2 + cC^2 + AB(a + b) + BC(b + c) + CA(c + a) &= \\ = X - ABc - BCa - CAa &= 0. \end{aligned}$$

(3) alapján a baloldal utolsó három tagjának összege 0 (lásd II. megoldást) és így

$$X = 0.$$