

I. megoldás: A baloldalakat polinommal alakítva

$$\begin{aligned}(1) \quad & x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a, \\(2) \quad & x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = b\end{aligned}$$

egyenletekhez jutunk. Miután mind a két egyenlet harmadfokú és az egyik sem látszik alacsonyabb fokúra redukálhatónak, az egyenletrendszer megoldásánál majd köbgyökvonást kell végeznünk. Arra törekszünk tehát, hogy a változók lehető egyszerű kifejezésének teljes köbét állítsuk elő.

Összeadva (1)-et és (2)-t, továbbá osztva kettővel

$$(3) \quad x^3 + y^3 = \frac{a+b}{2}.$$

A baloldalt $3x^2y + 3xy^2$ egészítené ki $(x+y)$ köbére. Vegyük észre, ha kivonjuk (2)-t, éppen ilyen alakú kifejezéshez jutunk:

$$2x^2y + 2xy^2 = a - b.$$

Mindkét oldalt $\frac{3}{2}$ -vel szorozva nyerjük

$$(4) \quad 3x^2y + 3xy^2 = \frac{3(a-b)}{2}$$

(3) és (4) összege

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3 = \frac{a+b+3a-3b}{2} = 2a-b.$$

Köbgyököket vonva

$$(5) \quad x+y = \sqrt[3]{2a-b}.$$

Másrészt (4)-et így alakíthatjuk át:

$$xy(x+y) = \frac{a-b}{2},$$

melybe $x+y$ (5) alatt nyert értékét behelyettesítve,

$$(6) \quad xy = \frac{a-b}{2\sqrt[3]{2a-b}}.$$

Eszerint x és y a következő másodfokú egyenlet gyökei

$$z^2 - \sqrt[3]{2a-b} \cdot z + \frac{a-b}{2\sqrt[3]{2a-b}} = 0.$$

Megoldva az egyenletet:

$$\begin{aligned}z_1 = x_1 = y_2 &= \frac{\sqrt[3]{2a-b} + \sqrt{\sqrt[3]{(2a-b)^2} - \frac{2(a-b)}{\sqrt[3]{2a-b}}}}{2}, \\z_2 = x_2 = y_1 &= \frac{\sqrt[3]{2a-b} - \sqrt{\sqrt[3]{(2a-b)^2} - \frac{2(a-b)}{\sqrt[3]{2a-b}}}}{2}.\end{aligned}$$

II. megoldás: Vezessünk be új változókat. Legyen

$$x+y = u, \quad \text{és} \quad xy = v.$$

Az új változók behelyettesítése céljából átalakítjuk egyenleteinket

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2+y^2) &= (x+y)[(x+y)^2 - 2xy] = a \\(x-y)(x^2-y^2) &= (x-y)^2(x+y) = [(x+y)^2 - 4xy](x+y) = b.\end{aligned}$$

Elvégezve a behelyettesítést

$$\begin{aligned}(1) \quad & u(u^2 - 2v) = u^3 - 2uv = a, \\(2) \quad & (u^2 - 4v)u = u^3 - 4uv = b.\end{aligned}$$

Vonjuk ki (1) kétszereséből (2)-öt

$$(3) \quad u^3 = 2a - b; \quad u = \sqrt[3]{2a - b} = x + y$$

(1)-ből kifejezzük v -t u -val, majd behelyettesítjük u -nak (3)-ból nyert értékét

$$(4) \quad v = \frac{u^3 - a}{2u} = \frac{a - b}{2 \sqrt[3]{2a - b}} = xy.$$

Mint hogy (3) és (4) megegyezik az I. megoldás (5) és (6) egyenletével az I. megoldás szerint számolhatunk tovább.

Megjegyzés: Mindkét adott függvény az x és y szimmetrikus kifejezése, amin azt értjük, hogy x és y felcserélésével változatlan marad. Az $u = x + y$ és $v = xy$ kifejezéseket a két változó elemi szimmetrikus kifejezéseinek nevezzük. Bebizonyítható, hogy bármely szimmetrikus kifejezés pusztán a négy alapművelet segítségével kifejezhető az elemi szimmetrikus kifejezésekkel, mégpedig egyértelműen. A II. megoldásban ezt tettük.