

I. megoldás: Nem megy az általánosság rovására, ha egyszer és mindenkorra feltételezzük, hogy $a > b$. Pythagoras tétele szerint

$$(1) \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

feltételünk szerint (mivel a súlyvonal $\frac{c}{2}$)

$$(2) \quad 2ab = \frac{c^2}{2}$$

(1) és (2)-t összeadva, ill. kivonva nyerjük

$$(a + b)^2 = \frac{3c^2}{2},$$

$$(a - b)^2 = \frac{c^2}{2},$$

amiből

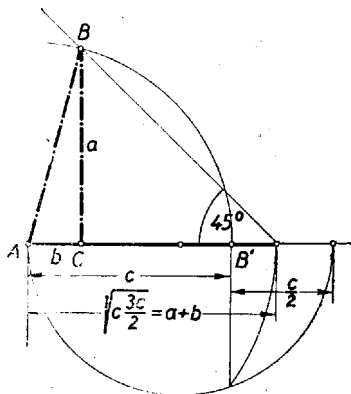
$$(3) \quad a + b = \frac{c\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{6}}{2},$$

$$(4) \quad a - b = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$

A szerkesztés ezek alapján többféleképpen is történhetik.

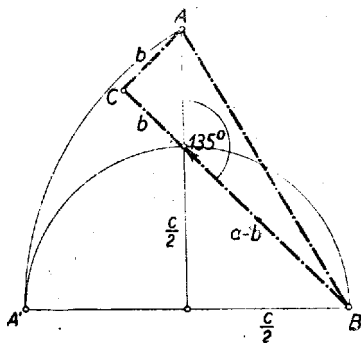
α) (3) és (4) összeadásából nyerjük, hogy $a = \frac{c\sqrt{6} + c\sqrt{2}}{4}$, amely szakasz könnyen szerkeszthető ($c\sqrt{6}$ mértani középárányos $2c$ és $3c$ között, $c\sqrt{2}$ pedig c és $2c$ között). a és c birtokában a keresett háromszög szerkesztése triviális.

β) (3) alapján $a+b$, mint mértani középárányos c és $\frac{3}{2}c$ között megszerkeszthető. Az $a+b$ és c szakaszok birtokában a háromszög szerkesztése a tankönyvből ismeretes (1. ábra).



1. ábra

γ) (4) szerint $a - b$ olyan négyzet átlója, melynek oldala $\frac{c}{2}$. $a - b$ és c birtokában a derékszögű háromszög ismert módon (2. ábra) megszerkeszthető.



2. ábra

Mindhárom esetben könnyen kimutatható, hogy az így megszerkesztett háromszög tényleg eleget tesz követelményünknek. Pl. az utóbbi esetben Pythagoras-tétele alapján

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 2 \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2},$$

amiből

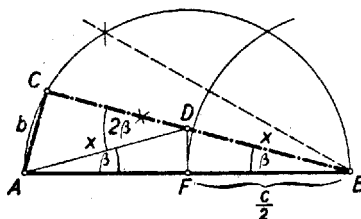
$$2ab = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} = c^2 - \frac{c^2}{2} = \frac{c^2}{2},$$

és így tényleg

$$ab = \frac{c^2}{4}.$$

Oldalak helyett szögeket is kiszámíthatunk, mint azt az alábbi II–V. megoldások mutatják.

II. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 3. ábra mutatja.



3. ábra

Jelöljük az AB átfogó felező pontját F -fel, tehát $FA = FB = \frac{c}{2}$. Az F -ben az átfogóra emelt merőleges messe a $BC = a$ befogót D -ben. Legyen $AD = DB = x$.

A szögek egyenlősége miatt

$$ABC\triangle \sim DBF\triangle,$$

és így

$$x : \frac{c}{2} = c : a,$$

amiből

$$x = \frac{c^2}{2a}.$$

De a feltétel szerint

$$c^2 = 4ab,$$

és így

$$x = 2b$$

Az ACD derékszögű háromszögben $\sin CDA = \sin 2\beta = \frac{b}{x} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, amiből

$$2\beta = 30^\circ, \quad \text{vagyis} \quad \beta = 15^\circ,$$

mely szög könnyen szerkeszthető.

III. megoldás: A jelöléseket megtartva

$$a = c \sin \alpha, \quad b = c \cos \alpha.$$

A feltétel szerint

$$ab = c^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{c^2}{4},$$

vagyis, $\frac{2}{c^2}$ -tel szorozva

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2},$$

azaz

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2},$$

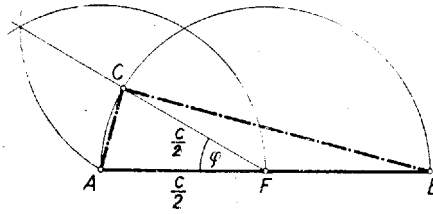
ahonnan ($0 < 2\alpha < 180$)

$$2\alpha = 30^\circ \quad \text{ill.} \quad 150^\circ,$$

$a > b$ miatt

$$\alpha = 75^\circ.$$

IV. megoldás: Az előbbi jelöléseket megtartva jelöljük az AFC -et φ -vel (4. ábra).



4. ábra

Az $AFC\triangle$ területe a fele az $ABC\triangle$ területének. Tehát

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \sin \varphi = \frac{ab}{4},$$

vagyis $c^2 \sin \varphi = 2ab$, amiből $\sin \varphi = \frac{2ab}{c^2}$.

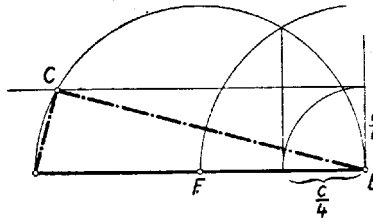
De a feltétel szerint $ab = \frac{c^2}{4}$, vagyis $2ab = \frac{c^2}{2}$, és így $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, vagyis $\varphi = 30^\circ$. A C pont megszerkesztése a körülírt körön egyszerűbb már nem lehet.

V. megoldás: A legegyszerűbb megoldáshoz (ha nem is a legegyszerűbb szerkesztéshez) jutunk, ha feltételünket »helyesen« olvassuk.

Feltételünk szerint

$$ab = \frac{c^2}{4} = c \cdot \frac{c}{4}.$$

ab a háromszög kétszeres területe, tehát $c \cdot \frac{c}{4}$ is az, vagyis $\frac{c}{4}$ a háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága. A szerkesztést az 5. ábra mutatja.



5. ábra

Az utóbbi megoldásnál közvetlenül nyilvánvaló, hogy a megszerkesztett háromszög teljesíti a feladatban kirótt feltételt: $ab = c \cdot \frac{c}{4} = \frac{c^2}{4}$. A II–IV. megoldásnál (ahol tulajdonképpen kiszámítottuk, hogy $\alpha = 75^\circ$ és $\beta = 15^\circ$) a következőképpen igazolhatjuk szerkesztésünk helyességét:

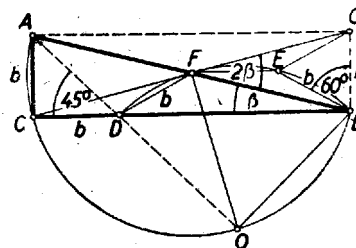
$$a = c \cos 15^\circ, \quad b = c \sin 15^\circ,$$

és így

$$ab = c^2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = c^2 \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{c^2}{4}.$$

De anélkül, hogy a háromszög oldalait vagy szögeit kiszámítanánk, is megoldhatjuk feladatunkat, amint azt az alábbi VI–VII. megoldások mutatják.

VI. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. A betűzést a 6. ábra mutatja.



6. ábra

Szerkesszük meg azt a kört, amely a CF egyenest F -ben érinti és a B csúcsponton is átmegy. Legyen ennek a körnek középpontja O és messe ez a kör a BC befogót másodszor D -ben. Mivel $CF^2 = CB \cdot CD$, vagyis $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a \cdot CD$, azért a feladat szerint $CD = b$. Ha kimutatjuk, hogy O rajta van az AB fölé, mint átmérő fölé rajzolt körön és $BO = \frac{c}{2}$, továbbá, hogy a D pont rajta van az AO egyenesen, akkor lényegében a II. megoldásban nyert szerkesztéshez jutottunk, de más indoklással.

Mivel BFC egyenlőszárú háromszögből

$$FCD' \sphericalangle = FBD \sphericalangle = \beta,$$

másrészt $CFD \sphericalangle = \beta$, mint az $\widehat{FD}$ ív fölötti húr-érintőszög, azért CDF egyenlő szárú háromszög és

$$FD = CD = b.$$

Az $\widehat{FB}$ ívhez tartozó húr-érintő szög, mint a $BFC\Delta$ külső szög 2β , tehát ez az ív kétszerese az $\widehat{FD}$ ívnek. Az E felezőpontját berajzolva, a húrokra $FE = EB = b$ és $FE \parallel DB$.

Az $ABC\Delta$ -et téglalappá egészítve ki FE ennek a középvonalán fekszik. Így $C'E = EB = b$, másrészt $BC' = AC = b$, tehát a BEC' szabályos háromszögből $C'BE \sphericalangle = 60^\circ$, s így

$$EBD \sphericalangle = 2\beta = 30^\circ,$$

Ugyanekkorak az $\widehat{FB}$ íven nyugvó kerületi szögek, és így a középponti szög

$$BOF \sphericalangle = 60^\circ \quad \text{és} \quad BO = FO = BF = \frac{c}{2}$$

a kör sugara. A BOD egyenlőszárú háromszög alapján nyugvó szög

$$DBO \sphericalangle = 60^\circ - \beta = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ = BDO \sphericalangle.$$

Ebből következik, hogy ez a háromszög derékszögű, továbbá A , D és O egy egyenesbe esnek és O (a C -vel együtt) az AB fölötti félkörön van.

Eszerint a szerkesztés menete: az $AB = c$ átmérő fölötti félkört a $BO = \frac{c}{2}$ távolsággal elmetszve, majd az AO egyenest az $OD = \frac{c}{2}$ távolsággal elmetszve, a BD egyenes metszi ki az AB fölötti félkörből a keresett háromszög C csúcsát.

A szerkesztés igazolása: Mivel az $ABO\Delta$ szögei 30° , 60° és 90° , azért az O körüli $\frac{c}{2}$ sugarú körnek az AB -vel való F metszéspontjára $FOB\Delta$ szabályos, mert $FBO \sphericalangle = 60^\circ$, tehát F felezőpont, $CF = \frac{c}{2}$, mint a derékszögű háromszög súlyvonala, továbbá $BFO \sphericalangle = 60^\circ$. BOD egyenlőszárú derékszögű háromszög, tehát $ADC \sphericalangle = DAC \sphericalangle = 45^\circ$, $CD = CA = b$; másrészt az AFC egyenlőszárú háromszögben $CAF \sphericalangle = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, s így az $AFC \sphericalangle = 30^\circ$. Ebből következik, hogy

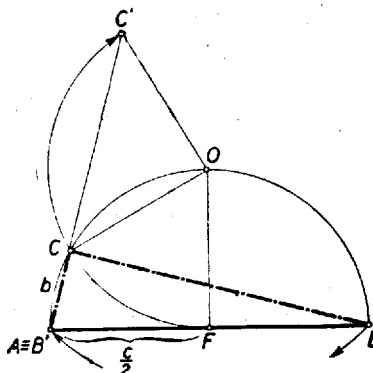
$$CFO \sphericalangle = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

Így CF érinti az O középpontú kört, s így

$$CF^2 = CD \cdot CB = ba,$$

tehát az $ABC\Delta$ megfelel a kívánalmaknak.

VII. megoldás: Az adott $AB = c$ átfogó fölé rajzolt F középpontú Thales-körben az AB átmérőre merőleges sugár végpontját jelöljük O -val (7. ábra).



7. ábra

O körül $OF = \frac{c}{2}$ sugárral rajzolt kör metszi ki a Thales-körből a keresett C pontot. (Ez tulajdonképpen az V. megoldásban nyert szerkesztés, ismét más megindokolással.)

Forgassuk el a $BC = a$ befogót O körül 90° -kal az óra járásával megegyező irányban, akkor a B elforgatása a B' az A pontba kerül, C elforgatása pedig C' , és $B'C' \equiv AC' \perp BC$. Mivel AC is merőleges BC -re, azért a C' pont az AC befogó meghosszabbításán fekszik.

A szerkesztés szerint az $AF = \frac{c}{2}$ az O körül rajzolt körnek az A pontból húzott érintője, és így

$$AC' \cdot AC = ab = \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$