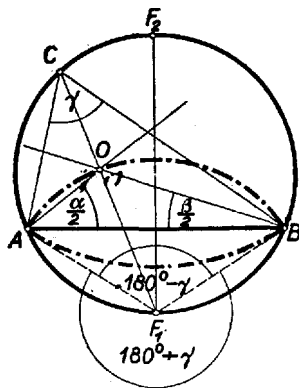


I. megoldás: Legyen A és B a két rögzített pont, F_1 és F_2 az AB húrra merőleges átmérőnek végpontjai és C a harmadik csúcs, mely egyelőre mozogjon az AF_2B köríven (1. ábra).



1. ábra

A kerületi szögek tétele alapján az $ACB \sphericalangle = \gamma$ szög állandó. A beírt kör O középpontja a szögfelezők metszéspontja, így az

$$AOB\triangle - \text{b} \ddot{\text{o}}\text{l} \text{ az } AOB\triangleleft = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

vagyis az O pontból az AB húr az állandó $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ szög alatt látszik. Tehát az O pontok mértani helyének egy része az AB húrhoz tartozó, $90 + \frac{\gamma}{2}$ szögnek megfelelő látóörív. E látóörív középpontja az AB húrra merőleges F_1F_2 egyenesnek az a pontja, amelyben az ugyanazon íven nyugvó középponti szög $2\left(90 + \frac{\gamma}{2}\right) = 180^\circ + \gamma$, vagyis amelyből az AB húr $360^\circ - (180^\circ + \gamma) = 180^\circ - \gamma$ szög alatt látszik; ez a pont pedig az F_1 pont, mert az $ACBF_1$ húrnégyszögben az $AF_1B \sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, mint a γ szöggel szembenfekvő szög.

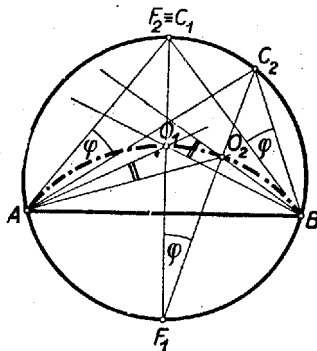
Ugyanúgy kimutatható, hogy ha a C pont a BF_1A íven mozog, akkor az O pont leírja az F_2 középpontú BA ívet. Tehát a feltételeket kielégítő O pontok szükségképpen az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, AB köríveken fekszenek. Meg kell még mutatnunk, hogy – fordítva – e köríveknek minden pontja eleget tesz a követelményeknek. Az $\angle AOB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$ szög AO , ill. BO száraára tükrözzük az AB egyenest (1. ábra). A tükröképek az AB egyenessel, annak az F_2 -t tartalmazó oldalán $2 \cdot \angle OAB$ és $2 \cdot \angle OBA$ nagyságú szögeket zárnak be. E két szög összege

$$2(OAB\angle + OBA\angle) = 2\left[180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right)\right] = 180^\circ - \gamma$$

tompaszög, tehát ezek az egyenesek metszik egymást az AB határolta, F_2 -t tartalmazó félsíkban és γ nagyságú szöget zárnak be. Ezek szerint C metszéspontjuk rajta van az AF_2B köríven és O , mint két szögfelező metszéspontja, az $ABC\Delta$ beírt körének középpontja, tehát megvan a mértani helyet definiáló tulajdonsága.

Most már kimondhatjuk, hogy a keresett mértani hely: az F_1 és F_2 középpontú, a kör belsejében fekvő, $\widehat{AB}$ körívek.

II. megoldás: Ha $C_1 \equiv F_2$, akkor az $AC_1B\Delta$ -be írt kör középpontja legyen O_1 (2. ábra).



2. ábra

Az AF_2B körív egy tetszőleges C_2 pontjához tartozó $ABC_2\Delta$ beírt körének középpontja, vagyis szögfelezőinek metszéspontja legyen O_2 . A változó C csúcspontból kiinduló szögfelező, a kerületi szögek tétele alapján, mindenkor átmegy az F_1 ponton

$$C_1AC_2\triangleleft = C_1F_1C_2\triangleleft = C_1BC_2\triangleleft = \varphi,$$

mint ugyanazon a köríven $(\widehat{C_1C_2})$ nyugvó kerületi szögek.

Ebből következik, hogy ha a háromszög f_c szögfelezője F_1 körül φ szöggel elfordul, akkor

1. az a és b oldal is φ szöggel fordul el és következésképpen

2. a másik két szögfelező $\frac{\varphi}{2}$ szöggel (az ábrán kétszeres ívvel jelölve) fordul el.

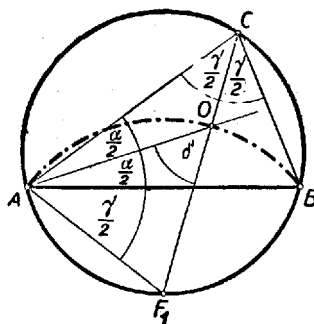
Tehát

$$O_1AO_2\angle = O_1BO_2\angle = \frac{\varphi}{2}.$$

Mivel a kerületi szögek tétele megfordítható, ez azt jelenti, hogy az O_1 és O_2 pontok rajta vannak azon az $\widehat{AB}$ köríven, melynek az O_1O_2 ívhez tartozó középponti szöge $2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi$, és maga a középpont pedig rajta van az AB húrt merőlegesen felező F_1F_2 egyenesen. Mivel – mint láttuk – éppen $O_1F_1O_2\angle = \varphi$, azért az O pontokat tartalmazó $\widehat{AB}$ körív középpontja F_1 . A fenti bizonyítás megfordításával kimutatható, hogy a szóbanforgó körív minden pontja eleget tesz feltételeinknek.

Ugyanígy végezhető a bizonyítás az AF_1B körívre nézve.

III. megoldás: $F_1AB\angle = F_1CB\angle = \frac{\gamma}{2}$, mint kerületi szögek (3. ábra).



3. ábra

Az $AOC\triangle$ O -nál fekvő külső szöge δ egyenlő a két belső szög összegével, vagyis $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$, amiből következik, hogy az $AOF_1\triangle$ egyenlő szárú, tehát

$$F_1O = F_1A.$$

Ugyanígy végezhető a szükségesség e bizonyítása az $\widehat{AF_1B}$ köríven fekvő C pontokhoz tartozó O pontokra nézve is. E bizonyítások megfordításból következik, hogy a szükséges feltétel elégséges is, és ezzel bebizonyítottuk, hogy az O pontok mértani helye az F_1 , és F_2 középpontú, A (és B) ponton átmenő köröknek, az adott kör belsejébe eső ívei.