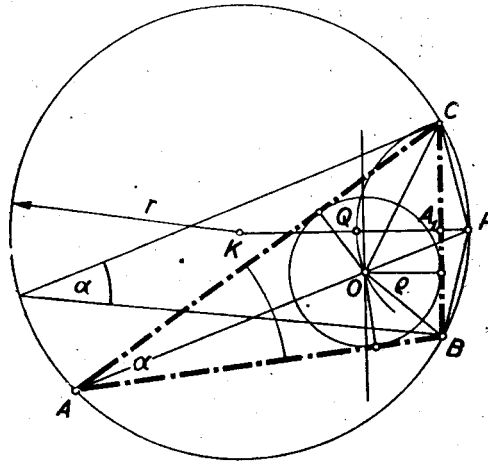


I. megoldás: Képzeljük a feladatot megoldottnak. Legyen az adott szög α a háromszög köré írt kör középpontja K és sugara r , beírt kör középpontja O és sugara ϱ . (1. ábra).



1. ábra

$$\text{A } BOC\triangle\text{-ből } \angle BOC = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{360^\circ - (\beta + \gamma)}{2} = \frac{180^\circ + [180^\circ - (\beta + \gamma)]}{2} = \frac{180^\circ + \alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

A kerületi szögek tétele alapján a K középpontú és r sugarú körben tetszőleges a kerületi szög szárainak a körrel való metszéspontjai megadják a háromszög $BC = a$ oldalát.

Az O pont – a fentiek szerint – rajta van azon a BC köríven, melynek pontjaiból a BC távolság $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ szög alatt látszik és amely körív a BC oldalnak ugyanazon az oldalán van, mint az α szög csúcspontja. E látószög-kör középpontját P -vel jelölve, a központi és kerületi szög közötti összefüggés alapján

$$(1) \quad \angle BPC = 360^\circ - 2 \left(90^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = 180^\circ - \alpha,$$

vagyis az $ABPC$ négyszög húrnégyszög és így a P pont a BC ív felezőpontja.

Egy másik geometriai hely O -ra nézve a BC egyenestől ϱ távolságban a BC -vel párhuzamosan húzott egyenes, a BC egyenesnek ugyanazon az oldalán, mint az előbbi körív.

A két mértani hely egyik metszéspontja a keresett O pont. O körül ϱ sugárral rajzolt körhöz a B és C pontokból szerkesztett érintők metszéspontja A (amely rajta van a köré írt körön) a keresett háromszög harmadik csúcspontja. (Általában két pontot kapunk O számára, de mindkettő egybevágó háromszögekre vezet, tehát csak egy megoldásról beszélünk.)

Határozzuk meg a megoldhatóság feltételeit. Jelöljük az a oldal felezőpontját A_1 -gyel és a PA_1 egyenesnek metszéspontját a látószög-körívvel, Q -val. Megoldás nyilván csak akkor van, ha $\varrho \leq A_1Q$

Mivel (1) alapján az $\angle A_1BP = \frac{\alpha}{2}$, azért

$$A_1P = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

és

$$PQ = PB = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

amiből

$$A_1Q = PQ - A_1P = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} - \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{De } a = 2r \sin \alpha = 4r \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{és így } A_1Q = 2r \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

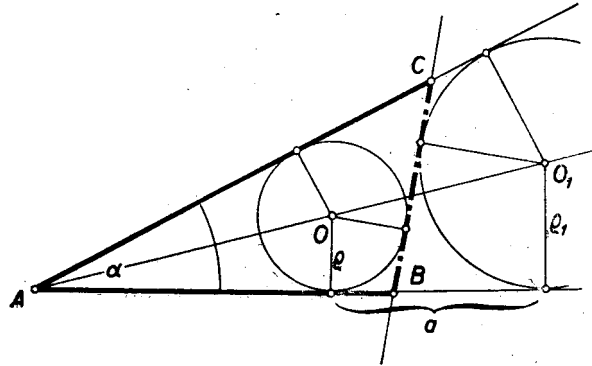
Tehát megoldás csak akkor van, ha

$$\varrho \leq 2r \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

Egyenlőség esetén $\varrho = A_1Q$ és a háromszög egyenlő szárú ($b = c$).

Állandó r esetén a jobboldal akkor [maximális, ha $\sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)$ maximális. Egy szorzat pedig, amelyben a tényezők összege állandó, akkor veszi fel a legnagyobb értéket, ha a tényezők egyenlők, vagyis $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$, amiből $\alpha = 60^\circ$ és $\varrho \leq \frac{r}{2} \cdot \varrho$ maximális értéke tehát $\frac{r}{2}$ és ezt akkor veszi fel, ha $\alpha = 60^\circ$ és azonkívül $\beta = \gamma = 60^\circ$, vagyis a háromszög egyenlő oldalú. L. »K. M. L.« I. évf. 1948. május, 167. sz. feladat.)

II. megoldás: Felhasználjuk ezt a tételt (I. osztályos tankönyv 1950-es kiadás, 285. oldal), mely szerint egy háromszög beírt és hozzáírt körének egy-egy közös külső érintő oldalán lévő két érintési pontjának távolsága egyenlő a harmadik oldallal, amely a fenti két kör közös belső érintőjének a külső érintők közé eső szakasza.



2. ábra

Eszerint a szerkesztés menete: a $BC = a$ háromszög oldal szerkesztése ugyanúgy történik, mint az I. megoldásban. Felvesszük az α szöget és szerkesztünk egy ϱ sugarú, mindkét szárt érintő kört (2. ábra). Az egyik szögszáron az érintés: pontból kiindulva felmérjük – a szög csúspontjától távolodó irányban – az a távolságot. Az így nyert pont lesz az említett tétel alapján a hozzáírt. kör érintési pontja. A beírt és hozzáírt kör egy közös belső érintője metszi ki az α szög száraiból a B és C csúspontokat.

A megoldhatóság feltétele: a hozzáírt kör középpontját O_1 -gyel és sugarát ϱ_1 -gyel jelölve, feladatunk csak akkor oldható meg, ha $\varrho + \varrho_1 \leq OO_1$. De

$$\varrho_1 = \varrho + a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad OO_1 = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

és így feltételünk

$$2\varrho + \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{amiből } \varrho \leq \frac{a \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2r \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right), \text{ ami megegyezik az I. megoldásból nyert feltétellel}$$