

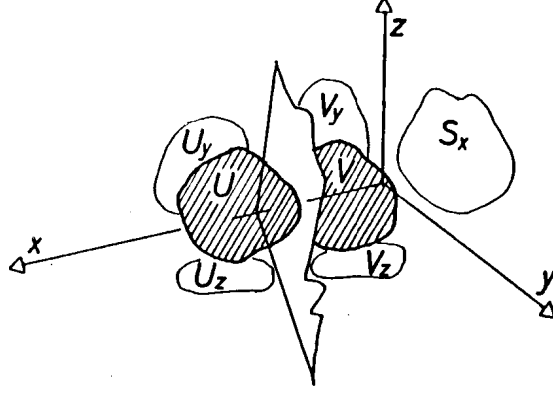
Az állítást a pontok száma szerinti teljes indukcióval fogjuk bizonyítani.

Először is megjegyezzük, hogy ha a, b, c pozitív egészek és S azokból a rácpontokból áll, amelyeknek x koordinátája 1 és a , y koordinátája 1 és b , z koordinátája pedig 1 és c közé eső egész szám, akkor (1)-ben egyenlőség van, mert $|S| = abc$, $|S_x| = bc$, $|S_y| = ac$ és $|S_z| = ab$.

Ezért az indukciós lépésnél S -nek csak olyan részhalmazait érdemes vizsgálni, amelyeket úgy kapunk, hogy S -et egy, valamelyik koordinátságokkal párhuzamos síkkal két részre vágjuk.

Ha csak egy pont van, akkor $|S| = |S_x| = |S_y| = |S_z| = 1$, és az állítás igaz.

Tegyük most fel, hogy a pontok száma $|S| = n > 1$, és n -nél kevesebb pontra az állítás igaz.



Először megmutatjuk, hogy van olyan sík, amely valamelyik koordinátságokkal párhuzamos és két nem üres részre osztja S -et. Ha S -et nem lehet egy, az x -tengelyre merőleges síkkal kettévágni, akkor S minden pontjának ugyanaz az x -koordinátája. Hasonlóan, ha az y - és a z -tengelyre merőlegesen sem lehet két nem üres részre kettévágni, akkor a pontoknak az y - és z -koordinátája is megegyezik. Mivel azonban S -nek legalább 2 pontja van, ez lehetetlen.

Mivel a feladatban a koordináta-tengelyek szerepe szimmetrikus, feltehetjük, hogy az x -tengelyre merőlegesen vágjuk szét S -et két nem üres részre.

Legyen a két rész U és V ; pontjaiknak az yz -, xz -, xy -síkokra való ortogonális vetületeiből álló halmazok U_x, U_y, U_z , illetve V_x, V_y, V_z .

Az U és V halmazok konstrukciójából következik, hogy

$$|U| + |V| = |S|, \quad |U_y| + |V_y| = |S_y|, \quad |U_z| + |V_z| = |S_z|, \\ |U_x| \leq |S_x| \text{ és } |V_x| \leq |S_x|.$$

Ezen kívül, mivel U -nak és V -nek n -nél kevesebb pontja van, az indukciós feltevés szerint

$$|U|^2 \leq |U_x||U_y||U_z| \text{ és } |V|^2 \leq |V_x||V_y||V_z|.$$

Mindezek és a Cauchy – Bunyakovszkij – Schwarz egyenlőtlenség felhasználásával

$$\begin{aligned} |S_x||S_y||S_z| &= \\ &= |S_x|(|U_y| + |V_y|)(|U_z| + |V_z|) = |S_x| \left(\sqrt{|U_y|^2} + \sqrt{|V_y|^2} \right) \left(\sqrt{|U_z|^2} + \sqrt{|V_z|^2} \right) \geq \\ &\geq |S_x| \left(\sqrt{|U_y|}\sqrt{|U_z|} + \sqrt{|V_y|}\sqrt{|V_z|} \right)^2 = \\ &= \left(\sqrt{|S_x|}\sqrt{|U_y|}\sqrt{|U_z|} + \sqrt{|S_x|}\sqrt{|V_y|}\sqrt{|V_z|} \right)^2 \geq \\ &\geq \left(\sqrt{|U_x||U_y||U_z|} + \sqrt{|V_x||V_y||V_z|} \right)^2 \geq (|U| + |V|)^2 = |S|^2. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.