

**I. megoldás.** Tetszőleges  $k \in \mathbf{N}$  esetén, ha  $k$  diadikus alakja

$$k = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}_{\mathcal{Q}} = \sum_{s=0}^n a_s \cdot 2^s \quad (a_i = 0 \text{ vagy } 1; i = 0, \dots, n),$$

akkor legyen

$$y_k = \sum_{s=0}^n a_s \cdot 2^{-as},$$

ahol  $a > 1$  a feladatban rögzített valós szám. Legyen most  $i, j \in \mathbf{N}, i \neq j$ , továbbá  $i$  és  $j$  kettes számrendszerbeli alakja

$$i = \overline{b_n b_{n-1} \dots b_0}_{\mathcal{Q}} \quad \text{és} \quad j = \overline{c_m c_{m-1} \dots c_0}_{\mathcal{Q}}.$$

Feltehető, hogy  $i > j$ , és ekkor  $n \geq m$ . Tegyük fel továbbá, hogy  $r$  az a természetes szám, amelyre  $i$  és  $j$  diadikus alakja az utolsó  $r$  db jegyben megegyezik, de  $(r+1)$ -edik jegyében – hátulról olvasva – már különbözik:

$$r = \min\{s \mid b_s \neq c_s, \quad 1 \leq s \leq n\},$$

( $m < s \leq n$  esetén legyen  $c_s = 0$ ). Ekkor

$$(1) \quad |i - j| = i - j \geq 2^r,$$

és  $a > 1$  miatt

$$\begin{aligned} |y_i - y_j| &= \left| \sum_{s=0}^n b_s \cdot 2^{-as} - \sum_{s=0}^m c_s \cdot 2^{-as} \right| = \left| \sum_{s=r}^n b_s \cdot 2^{-as} - \sum_{s=r}^m c_s \cdot 2^{-as} \right| \geq \\ &\geq 2^{-ar} - 2^{-a(r+1)} - 2^{-a(r+2)} - \dots - 2^{-an} > 2^{-ar} \left( 1 - \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-as} \right) = \\ &= 2^{-ar} \left( 1 - 2^{-a} \frac{1}{1 - 2^{-a}} \right) = 2^{-ar} \left( 1 - \frac{1}{2^a - 1} \right) = 2^{-ar} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1}. \end{aligned}$$

Ezt (1)-gyel egybevetve:

$$|y_i - y_j| \cdot |i - j|^a > 2^{-ar} \cdot \frac{2^a - 2}{2^a - 1} \cdot (2^r)^a = \frac{2^a - 2}{2^a - 1},$$

ami azt jelenti, hogy az

$$x_k = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} y_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

sorozat  $i, j \in \mathbf{N}; i \neq j$  esetén

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a > 1,$$

továbbá ( $y_k$ ) korlátos volta miatt ( $x_k$ ) is korlátos:

$$0 \leq x_k = \frac{2^a - 1}{2^a - 2} y_k < \frac{2^a - 1}{2^a - 2} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-as} = \frac{2^a}{2^a - 2}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

**II. megoldás.** Konstruksiót adunk az  $a = 1$  esetre – ez nyilván megfelelő  $a > 1$  esetére is.

Alapötletünk a következő: Tegyük fel, hogy  $\gamma$  olyan (irracionális) szám, amelynek minden  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbf{Z}; q > 0$ ) közelítő törtjére az eltérés

$$(2) \quad \left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\alpha q^2},$$

ahol  $\alpha > 0$  valamilyen rögzített konstans. Ekkor tekintjük az

$$x_k = \alpha \cdot \{\gamma k\} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

sorozatot, ahol  $\{t\} = t - [t]$  a  $t$  szám törtrésztét jelöli. Világos, hogy ( $x_k$ ) korlátos:

$$0 < x_k < \alpha,$$

továbbá  $i, j \in \mathbf{N}; i \neq j$  esetén ( $i > j$  feltehető)

$$\begin{aligned}|x_i - x_j| \cdot |i - j| &= \alpha \cdot |\{\gamma i\} - \{\gamma j\}| \cdot |i - j| = \\ &= \alpha \cdot |(\gamma i - \gamma j) - ([\gamma i] - [\gamma j])| \cdot |i - j|,\end{aligned}$$

ill. a  $q = i - j$  ( $> 0$ ),  $p = [\gamma i] - [\gamma j]$  jelöléssel  $p$  és  $q$  egészek, tehát (2) szerint

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j| = \alpha \cdot |q\gamma - p| \cdot q = \alpha q^2 \cdot \left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq 1,$$

vagyis az  $(x_k)$  sorozat megfelelő.

Az is látszik, hogy az

$$x'_k = x_k - \frac{\alpha}{2} \quad (k = 0, 1, \dots) \text{ sorozatra} \quad |x'_k| < \frac{\alpha}{2}, \text{ továbbá}$$

$$|x'_i - x'_j| \cdot |i - j| = |x_i - x_j| \cdot |i - j| \geq 1,$$

tehát az  $x'_k$  sorozat is megfelelő.

Ezek szerint csak a (2)-t kielégítő  $\gamma$ -t és  $\alpha$ -t kell találnunk, sőt minél kisebb az  $\alpha$ , annál jobb a sorozatunk korlátja.

(2)-re talán  $\gamma = \sqrt{2}$  és  $\alpha = 3$  adja a legegyszerűbb példát:

$$(3) \quad \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}$$

mindig fennáll. Ha ugyanis lenne olyan  $\frac{p}{q}$  közelítő tört, amelyre

$$(4) \quad \left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{3q^2},$$

akkor

$$\sqrt{2}q - \frac{1}{3q} \leq p \leq \sqrt{2}q + \frac{1}{3q},$$

azaz négyzetre emelés és rendezés után

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2 \leq p^2 - 2q^2 \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2$$

lenne, amiből

$$|p^2 - 2q^2| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3q}\right)^2$$

következnék. (4) nyilván nem állhat fenn  $q = 1$  esetén, ezért  $q \geq 2$ , tehát

$$|p^2 - 2q^2| \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3 \cdot 2}\right)^2 = \frac{2\sqrt{2} + \frac{1}{12}}{3} < 1.$$

vagyis

$$p^2 - 2q^2 = 0,$$

hiszen  $|p^2 - 2q^2|$  nemnegatív egész.

Mivel  $\sqrt{2}$  irracionális, ezért  $p^2 - 2q^2 = 0$  ellentmondást jelent, ami (3)-at igazolja.

Ezzel sikerült megadnunk olyan  $(x_k)$  sorozatot, amelyre

$$|x_k| < \frac{3}{2}, \quad \text{és} \quad |x_i - x_j| \cdot |i - j| \geq 1$$

teljesül, ha  $i, j \in \mathbf{N}; \quad i \neq j$ .