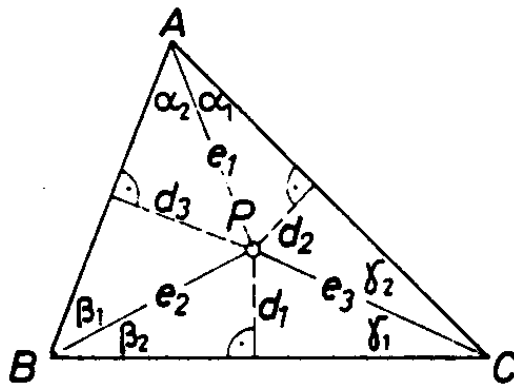


Használjuk az ábra jelöléseit.



Vegyük észre, hogy

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} = \frac{\frac{d_2}{e_1} \cdot \frac{d_3}{e_2} \cdot \frac{d_1}{e_3}}{\frac{d_3}{e_1} \cdot \frac{d_1}{e_2} \cdot \frac{d_2}{e_3}} = 1.$$

Tegyük fel, hogy a feladat állítása nem igaz, tehát α_1, β_1 , és γ_1 is nagyobb, mint 30° . Ha például $\alpha \geq 150^\circ, \beta$ és γ is kisebb, mint 30° , így máris ellentmondásra jutottunk. Ha pedig α, β és γ mindegyike kisebb 150° -nál, akkor $\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma > \frac{1}{8}$. Ugyanakkor a számtani és a mértani közepek közti egyenlőtlenség szerint

$$\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 \leq \left(\frac{\sin \alpha_2 + \sin \beta_2 + \sin \gamma_2}{3} \right)^3.$$

A Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva (hisz a $\sin$ függvény a $[0, \pi]$ intervallumon konkáv)

$$\sin \alpha_2 + \sin \beta_2 + \sin \gamma_2 \leq 3 \sin \frac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3}.$$

De mivel $0^\circ < \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 < 90^\circ$, $3 \sin \frac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2}{3} < \frac{3}{2}$, így

$$\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2 < \left(\frac{\frac{3}{2}}{3} \right)^3 = \frac{1}{8},$$

vagyis

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1}{\sin \alpha_2 \sin \beta_2 \sin \gamma_2} > 1.$$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát bizonyítottuk a feladat állítását.