

Jelölje  $\varepsilon$  a 995-ik komplex egységgyökök közül az elsőt. Tekintsük a következő 995 tagú összeget:

$$(1) \quad \begin{aligned} S = & 0 \cdot \varepsilon^0 + 199 \cdot \varepsilon^{199} + 398 \cdot \varepsilon^{398} + 597 \cdot \varepsilon^{597} + 796 \cdot \varepsilon^{796} + \\ & + 1 \cdot \varepsilon^5 + 200 \cdot \varepsilon^{204} + 399 \cdot \varepsilon^{403} + 598 \cdot \varepsilon^{602} + 797 \cdot \varepsilon^{801} + \\ & + 2 \cdot \varepsilon^{10} + 201 \cdot \varepsilon^{209} + 400 \cdot \varepsilon^{408} + 599 \cdot \varepsilon^{607} + 798 \cdot \varepsilon^{806} + \\ & + \dots \\ & + 198 \cdot \varepsilon^{990} + 397 \cdot \varepsilon^{194} + 596 \cdot \varepsilon^{393} + 795 \cdot \varepsilon^{592} + 994 \cdot \varepsilon^{791} + \end{aligned}$$

(Minden tag  $\varepsilon$ -os szorzandója a felette levőének  $\varepsilon^5$ -szerese. Felhasználjuk, hogy  $\varepsilon^{995} = 1$ . Az együtthatók a 995-ik egységgyököket megszorozzák a  $[0; 994]$  intervallum egészeivel. Az (1)-et a nem nulla  $(1 - \varepsilon^{199})$ -el szorozva:

$$(2) \quad \begin{aligned} (1 - \varepsilon^{199})S = & 0 \cdot \varepsilon^0 - 0 \cdot \varepsilon^{199} + 199 \cdot \varepsilon^{199} - 199 \cdot \varepsilon^{398} + 398 \cdot \varepsilon^{398} - 394 \cdot \varepsilon^{597} + \\ & + 597 \cdot \varepsilon^{597} - 597 \cdot \varepsilon^{796} + 796 \cdot \varepsilon^{796} - 796 \cdot \varepsilon^{995} + \dots = \\ = & -796 \cdot \varepsilon^0 + 199 \cdot \varepsilon^{199} + 199 \cdot \varepsilon^{398} + 199 \cdot \varepsilon^{597} + 199 \cdot \varepsilon^{796} + \dots = \\ = & 199 \underbrace{(\varepsilon^0 + \varepsilon^1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{994})}_{S_1} - 995 \underbrace{(\varepsilon^0 + \varepsilon^5 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{15} + \dots + \varepsilon^{990})}_{S_2}. \end{aligned}$$

Mivel  $S_1 = S_2 = 0$ , ezért  $(1 - \varepsilon^{199})S = 0$ , amiből  $S = 0$ , innen  $995(997S_1 + 2S) = 0$ . Így a 995-ik egységgyökök megszámozhatóak a  $995 \cdot 997, 995 \cdot 999, \dots, 995 \cdot 2985$  számokkal úgy, hogy minden egységgyököt a rá írt számmal megszorozva, majd az így kapott vektorokat összeadva nullvektort kapunk. A  $995(995 + 2k)$  hosszúságú vektort egy vele egyirányú  $(995 + i)^2$ , és egy vele ellentétes irányú  $i^2$  hosszúságú vektorral helyettesítve az összeg változatlan marad, hiszen  $(995 + k)^2 - k^2 = 995(995 + 2k)$ . Tehát az 1990-edik egységgyököket megszámoztuk az  $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 1990^2$  számokkal úgy, hogy mindegyiket a ráírt számmal szorozva, majd ezeket összeadva az összeg a nullvektor lesz. Másrészt azonban ezeket a súlyozott egységgyököket növekvő argumentum szerint az „orr-farok” módszerrel egymás után rakva éppen egy, a feladatban kért 1990-szöget kapunk.