Rögtön észrevehetjük, hogy B-nek mindig csökkentenie kell az utoljára elhangzott számot, A-nak pedig növelnie (legalábbis nem csökkentenie). Az is látszik, hogy B csak akkor nyerhet, ha A előtte prímhatványt mondott. Mivel A mindig egy $[n_{2k}, n_{2k}^2]$ típusú intervallumból választhat számot, ezért — úgy érezzük — B-nek elég kevés esetben van esélye a nyerésre, feltéve persze, hogy A valamilyen ésszerű stratégiával játszik.

Célszerű tehát először az a) kérdéssel foglalkoznunk. Ha $n_0 \leq 1990 < n_0^2$, akkor A triviálisan nyer az $n_1 = 1990$ számmal, ezért $45 \leq n_0 \leq 1990$ esetén A-nak van nyerési stratégiája.

Az $1990 < n_0$ esetben A nem alkalmazhatja ezt a módszert, de ha tud olyan n_1 számot mondani, amelyre B csak $45 \leq n_2 \leq 1990$ számmal válaszolhat, akkor ismét A nyer, hiszen ekkor n_0 szerepét n_2 veszi át. Legyen például $n_1 = 47 \cdot 53 = 2491$ – A választhatja ezt a számot $1990 < n_0 \leq 2491$ esetén –, ezzel $n_2 = 47$ vagy 53.

Ezzel beláttuk, hogy $45 \leq n_0 \leq 2491$ esetén A tud nyerni, hasonlóan fogjuk igazolni k szerinti teljes indukcióval, hogy $45 \leq n_0 \leq 2^{k-1} \cdot 2491$ esetén (k pozitív egész) is A-nak van nyerési stratégiája.

$k = 1$-re már beláttuk az állítást, tegyük fel ezért, hogy valamilyen $k \geq 1$-re igaz az állítás, azt kell megmutatnunk, hogy

$$2^{k-1} \cdot 2491 < n_0 \leq 2^k \cdot 2491$$

esetén A-nak van nyerési stratégiája.

Válassza ehhez A az $n_1 = 2^k \cdot 2491 = 2^k \cdot 47 \cdot 53$ számot, nyilván $n_0 \leq n_1 < n_0^2$. Ezek után B csak egy $n_2 = n_1/p^\alpha = (2^k \cdot 47 \cdot 53)/p^\alpha$ alakú egészet választhat, ahol p^α prímhatvány. Erre $47 < n_2 \leq \dfrac{n_1}{2} = 2^{k-1} \cdot 2491$, ami azt jelenti induktív feltevésünk szerint, hogy A-nak van nyerési stratégiája, az állítás $(k+1)$-re is fennáll.

Eddigi eredményeinket összefoglalva kapjuk, hogy a $45 \leq n_0$ esetben A-nak van nyerési stratégiája.

Próbáljuk meg a fennmaradó $n_0 < 45$ eseteket is erre az esetre visszavezetni. A-nak olyan n_1 számot kell mondania, amelyre B csak egy $45 \leq n_2$ számot választhat. Tekintsük ehhez az $n_1 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 495$ számot – A választhatja ezt a $23 \leq n_0 \leq 44$ esetben, mert ekkor $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ –, ezzel n_2-re

$$n_2 \geq \min(3^2 \cdot 5, 3^2 \cdot 11, 5 \cdot 11) = 3^2 \cdot 5 = 45,$$

vagyis az előzőek alapján A-nak van nyerési stratégiája.

Hátra van az $n_0 \leq 22$ eset vizsgálata; A-nak most már elegendő olyan n_1 számot mondania, amelyre $n_2 \geq 23$. Legyen ehhez $n_1 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, ezzel $n_2 \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Mivel a $15 \leq n_0 \leq 22$ esetben $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ is teljesül, ezért ilyenkor is A-nak van nyerési stratégiája.

Tovább „lépegetünk" lefelé – mindig ugyanazzal a redukáló szándékkal: $11 \leq n_0 \leq 14$ esetén A száma legyen $n_1 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$; nyilván $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$, és $n_2 \geq 3 \cdot 5 = 15$, vagyis innen A nyerni tud – az eddig bizonyítottak miatt.

Végül legyen $n_1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ ha $8 \leq n_0 \leq 10$; ekkor $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ és $n_2 \geq \min(2^2 \cdot 3,\ 2^2 \cdot 5,\ 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 = 12$, ami azt jelenti, hogy ekkor is A-nak van nyerési stratégiája.

Ezzel beláttuk, hogy $8 \leq n_0$ *esetén* A*-nak van nyerési stratégiája.*

Ezzel a módszerrel nem tudjuk tovább csökkenteni n_0 olyan lehetséges értékeit, amelyekből kiindulva A el tudja érni a győzelmet. Azt tapasztaljuk ugyanis, hogy $n_0 < 8$ esetén A nem tud olyan n_1 számot mondani, amelyre B csak egy $n_2 \geq 8$-cal válaszolhatna. Ez a tény azt *sejteti* velünk, hogy $n_0 < 8$ esetén B legalább egy döntetlent ki tud kényszeríteni. (Valójában az előbbi észrevétel *igazolja* is sejtésünket, hiszen ha B nem nyer, akkor B még mindig ki tud kényszeríteni egy végtelen

$$n_0 < 8, n_1 < 64, n_2 < 8, n_3 < 64, n_4 < 8, n_5 < 64,\ \ldots$$

számsorozatot, ami azt jelenti, hogy A sem nyerhet, mert nem nevezheti meg az 1990-et. A későbbiekben azonban úgyis pontosabban megvizsgáljuk a döntetlen lehetőségeit, ezért egyelőre a sejtés elegendő számunkra.)

Foglalkozzunk most a b) kérdéssel.

Ha $n_0 = 2$, akkor $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ miatt A csak prímhatványt választhat ($n_1 = 2, 3, 4$), vagyis B mondhatja az $n_2 = 1$ számot, amivel megnyeri a játékot.

Ha $n_0 = 3$, akkor $n_1 = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$. Ha n_1 prímhatvány, akkor $n_2 = 1$-gyel B nyer, egyébként $n_1 = 6 = 2 \cdot 3$. Ekkor B választhatja az $n_2 = 2$ számot, és ekkor – mint az előbb igazoltuk – B-nek van nyerési stratégiája. (n_0 szerepét n_2 veszi át).

Ha $n_0 = 4$, akkor B az előbbiekhez hasonlóan el tudja érni a győzelmet, amennyiben n_1 prímhatvány, vagy $n_1 \leq 3^2$. Különben pedig $n_1 = 10,\ 12,\ 14,\ 15$; és ezeket az eseteket rendre visszavezethetjük az előzőekre az $n_2 = 2,\ 3,\ 2,\ 3$ választással, ugyanis $n_2 \leq 3$ esetén B-nek van nyerési stratégiája.

Végül $n_0 = 5$ esetén $n_0 \leq n_1 \leq n_0^2$ miatt n_1 prímhatvány, vagy $n_1 \leq 4^2$ (amire már láttuk, hogy B-nek van nyerési stratégiája), vagy pedig $n_1 = 18,\ 20,\ 21,\ 22,\ 24$, és ezeket az $n_2 = 2,\ 2^2,\ 3,\ 2,\ 3$ választással rendre visszavezethetjük a már megvizsgált $n_0 \leq 4$ esetre (n_0 szerepét n_2 veszi át).

Összességében tehát kimondhatjuk, hogy $2 \leq n_0 \leq 5$ *esetén* B*-nek van nyerési stratégiája.*

Meg kell még vizsgálnunk az $n_0 = 6, 7$ esetet. Mivel a B-nek győzelmet jelentő n_0 kezdőértékek lehetséges értékeit nem tudjuk a *szokásos módszerünkkel* tovább növelni, ezért igen *valószínűnek látszik,* hogy $n_0 = 6, 7$ esetén egyik játékos sem tudja kikényszeríteni a győzelmet. Ehhez csak azt kell igazolnunk, hogy mind A, mind B tud úgy játszani, hogy a másik ne nyerhessen.

Legyen tehát $n_0 = 6$ vagy 7, és A válassza az $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ számot, amelyre nyilván $n_0 < n_1 < n_0^2$. B ezután csak $n_2 = 2 \cdot 5 = 10$-et, vagy $n_2 = 3 \cdot 5 = 15$-öt, vagy $n_2 = 2 \cdot 3 = 6$-ot választhat.

Az $n_2 = 10, 15$ esetben – mint már láttuk – A-nak van nyerési stratégiája, az $n_2 = 6$ eset pedig A szempontjából ekvivalens az $n_0 = 6$ kezdéssel (tehát újra jöhet $n_0 = 30$, stb.) így beláttuk, hogy ha A ügyesen játszik, akkor B nem nyerhet.

Ugyanez áll viszont B-re is. Ha ugyanis $n_0 = 6$ vagy 7, akkor $6 \le n_1 \le 49$, és ha végignézzük a 6, 7, ..., 49 számokat, azt találjuk, hogy B mindig tud olyan n_2 számot mondani, amelyre $n_2 \le 6$. Ha $n_2 \le 5$, akkor a fentiek miatt nyerési stratégiája van B-nek (esetleg $n_2 = 1$), ha pedig $n_2 = 6$, akkor ugyanolyan helyzetet kapunk, mint amilyennel kezdtük a játékot (amikor $n_0 = 6$, 7).

Ezzel a feladatot megoldottuk, eredményeinket a következőképpen foglalhatjuk össze:

a) A-nak van nyerési stratégiája, ha $8 \le n_0$,

b) B-nek van nyerési stratégiája, ha $2 \le n_0 \le 5$, végül

c) egyik játékos sem tudja kikényszeríteni a győzelmet, ha $n_0 = 6, 7$.