

Definiáljuk az f függvényt a következőképpen: Vegyük tetszőleges $x \in Q^+$ számnak a prímfelbontását, ahol a prímeket a szokásosan értelmezzük, de nem csak nemnegatív, hanem egész hatványon fordulhatnak elő a prímfelbontásban. Vegyük sorra a prímeket (minden x esetében ugyanolyan sorrendben): $p_1, p_2, p_3, \dots$. Ekkor $f(x)$ legyen az a szám, amelyet x prímfelbontásából kapunk úgy, hogy p_{2n} helyébe p_{2n-1} -et, p_{2n-1} helyébe p_{2n}^{-1} -et írunk. Mivel mind a prímfelbontás, mind a behelyettesítési művelet egyértelmű, ezért $f(x)$ is. (Persze csak adott prímfelsorolás mellett) Bebizonyítjuk, hogy f teljesíti a kívánt feltételeket:

I. $f(x) \in Q^+$ nyilvánvaló.

II. Mivel f multiplikatív, és a kritérium nem érzékeny a multiplikativitásra, ezért elég $f(f(y)) = y^{-1}$ -et igazolni, és ezt is csak prímekre. Az f definíciója szerint

$$\begin{array}{lll} y = p_{2n} & \text{esetén} & f(f(y)) = f(p_{2n-1}) = p_{2n}^{-1} = y^{-1}, \\ y = p_{2n-1} & \text{esetén} & f(f(y)) = f(p_{2n}^{-1}) = p_{2n-1} = y^{-1}. \end{array}$$

Ezzel beláttuk az $f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}$ kritérium teljesülését is, azaz az így kapott f függvény példa ilyen függvényre.

Megjegyzés. Hammel-bázissal R^+ -ra is általánosítható a feladat, illetve minden ilyen f függvény jellemezhetővé válik. (A versenyen beadott, R^+ -ra is általánosított megoldásom is ezzel dolgozik, míg az itt leírt megoldásom alapötletét a versenyen csak megjegyzésben közöltem.)