

Kétségtől ez a feladat volt az első versenynap legkönnyebb feladata, főleg azok számára, akik nem szeretik a geometriát. Ugyanis a megoldás folyamán csupa „természetes” ötletet kell csak felhasználni, tulajdonképpen józan ész elegendő hozzá.

Legyenek a pontok nevei rendre $A_1, A_2, \dots, A_{2n-1}$. (Ha valamilyen A_i -t említünk, amelyre $i \geq 2n$, vagy $i \leq 0$, akkor az i modulo $(2n-1)$ értendő.)

Könnyen kialakulhat az a sejtésünk, hogy n -től függően $n-1$ vagy n a megfelelő k .

Próbáljunk „rossz” színezést találni. Vizsgáljuk a következő sorozatot

$$(*) \quad A_{n-2}; A_{2(n-2)}; A_{3(n-2)}; \dots; A_{i(n-2)},$$

amelyre teljesüljön, hogy $A_{(i+1)(n-2)}$ már előfordul a sorozatban. Ez az $A_{(i+1)(n-2)}$ pont csak az A_{n-2} lehet, hisz minden ponttól két pont van $n-2$ távolságra, s a többi pontnál ezek a szomszédok. Így

$$(i+1)(n-2) \equiv n-2 \pmod{(2n-1)},$$

vagyis

$$(i+1)(n-2) = n-2 + a(2n-1),$$

(ahol a megfelelő egész szám), így

$$(1) \quad i(n-2) = a(2n-1).$$

Ha $i = 2n-1$, akkor a sorozatunk az összes pontot tartalmazza. Közülük n darabot kiválasztva lesz köztük szomszédos (A_{n-2} és $A_{i(n-2)}$ szomszédosnak tekintendő), hiszen különben $A_{j(n-2)}$ kiválasztása esetén $A_{(j+1)(n-2)}$ nem választható ki, s az egyértelmű hozzárendelés miatt n pontot kiválasztva n pontot zárunk ki, ami összesen már több, mint $2n-1$. Nyilván $n-1$ pont kiválasztható, ilyen pl. az $A_{2(n-2)}; A_{4(n-2)}; \dots; A_{(2n-2)(n-2)}$. Tehát ha $i = 2n-1$, akkor $k = n$.

Nézzük meg azt, hogy milyen n -re lehetséges $i \neq 2n-1$. Ekkor $n-2$ -nek és $2n-1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója, ami csak a $(2n-1) - 2 \cdot (n-2) = 3$ lehet, és pedig abban az esetben, ha $n = 3e + 2$ alakú. Vagyis $i = \frac{2n-1}{3}$ lehetséges még. Ekkor a $(*)$ sorozatban éppen a 3-mal osztható sorszámú pontok találhatók. A sorszámokhoz 1-et, ill. 2-t adva kaphatjuk az alábbi sorozatokat:

$$(**) \quad A_{1(n-2)+1}; A_{2(n-2)+1}; \dots; A_{\frac{2n-1}{3}(n-2)+1},$$

$$(***) \quad A_{1(n-2)+2}; A_{2(n-2)+2}; \dots; A_{\frac{2n-1}{3}(n-2)+2}.$$

A három sorozat tartalmazza az összes pontot. Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy ha egy sorozat $\frac{2n-1}{3}$ elemet tartalmaz, akkor legfeljebb $\frac{n-2}{3}$ elem színezhető ki úgy, hogy a színezés rossz legyen. Ez mindhárom esetben megtehető, így adódik, hogy $n-2$ pontot még ki lehet színezni rosszul, $n-1$ -et azonban már nem.

Tehát: ha $n = 3e + 2$ alakú, akkor $k = n-1$, különben $k = n$.