

Azt a pontot, ahol MD másodszor metszi a kört, jelöljük X -szel. Továbbá legyen $ADC\angle = \gamma$, $CDX\angle = \alpha$, $XDB\angle = \beta$. Mivel szintén az AC ívhez tartozik, $ABC\angle = \gamma$. Az FG egyenes a DEM háromszög körülírt körének E -beli érintője, e kis körben az FEM szög az EM húrhoz tartozó érintő szárú kerületi szög, így $FEM\angle = EDM\angle = \alpha$. Ennek csúcsszögére: $GEA\angle = \alpha$. Ezentúl csak az $ABCD$ körülírt körére fogunk hivatkozni „kör” néven. E kör sugarát $\frac{1}{2}$ -nek választva, és tetszőleges L_1, L_2, L_3 köri ponthármasra az általános szinusztételt felírva:

$$(*) \quad L_1 L_3 = (\sin L_1 L_2 L_3\angle) \cdot 2R = \sin L_1 L_2 L_3\angle.$$

Az AEG háromszögben a szinusztételt felírva:

$$(**) \quad \frac{EG}{\sin GAE\angle} = \frac{AE}{\sin AGE\angle}.$$

Itt két észrevételt teszünk: mivel $GAE\angle + EAC\angle = 180^\circ$, ezért $\sin GAE\angle = \sin EAC\angle$. Másrészt CB feletti szögek kerületi szögek lévén $\alpha + \beta = CDB\angle = CAB\angle$ és $CAB\angle$ az AEG háromszög külső szöge, így $\alpha + \beta = CAB\angle = AGE\angle + AEG\angle$, tehát $AEG\angle = \alpha$ szerint $AGE\angle = \beta = XDB\angle$.

A $(*)$ és $(**)$ állításokból:

$$(1) \quad EG/CB = AE/XB.$$

Vegyük észre, hogy az EFB háromszögben az E csúcsnál levő szög α , a B -nél levő γ , ezért az F csúcsnál levő szög $180^\circ - \alpha - \gamma$, $\sin EFB\angle = \sin(\alpha + \gamma) = AX$. Az EFB háromszögben a szinusztétellel: $\frac{EF}{\sin \gamma} = \frac{EB}{\sin(\alpha + \gamma)}$, így $(*)$ szerint:

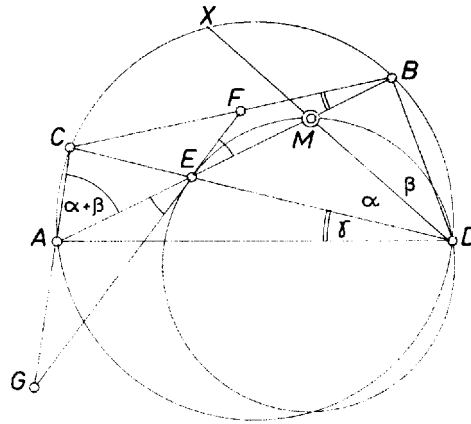
$$(2) \quad EF/AC = EB/AX.$$

(1)-et (2)-vel elosztva:

$$(3) \quad \frac{EG}{EF} = \frac{AE \cdot CB \cdot AX}{EB \cdot AC \cdot XB}.$$

Lemma: Egy $ACBD$ konvex húrnégyszög AB és CD átlóinak metszéspontja E . Ekkor:

$$CB \cdot AE \cdot BD = AC \cdot EB \cdot AD.$$



Bizonyítás: Az ADE háromszögben a szinusztételből:

$$AE/\sin ADE\angle = AD/\sin AED\angle,$$

azaz $(*)$ szerint

$$(L_1) \quad AE/AC = AD/\sin AED\angle.$$

Az EBC háromszögben hasonlóan

$$EB/\sin BCE\angle = CB/\sin CEB\angle = CB/\sin AED\angle,$$

$$(L_2) \quad EB/BD = CB/\sin AED\angle.$$

Az (L_2) egyenletet az (L_1) egyenlettel elosztva és rendezve a bizonyítandó állítást kapjuk.

Lemmánkat az $ACBD$ és $AXBD$ négyszögekre alkalmazva:

$$\begin{aligned}CB \cdot AE \cdot BD &= AC \cdot EB \cdot AD, \\XB \cdot AM \cdot BD &= AX \cdot MB \cdot AD.\end{aligned}$$

A második egyenletet az elsővel elosztva:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AE \cdot CB \cdot AX}{XB \cdot EB \cdot AC},$$

amelyet (3)-mal összevetve:

$$\frac{EG}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{AM}{AB - AM} = \frac{t}{1 - t}.$$

Megjegyzés. A feladat elolvasása és az ábra felrajzolása után mindjárt az a benyomásom támadt, hogy itt olyan sok szép egyenlő szög van, hogy elképzelhetetlen, hogy a megoldást ne lehetne valahogyan „kiszervenadni”. Sajnos, elegáns megoldást nem találván, tényleg ezt kellett tennem. Így versenydolgozatomban a szinusztételt 8 háromszögre alkalmaztam, majd ezek „cseles” összeszorozásával rengeteg tag kiesett és a bizonyítandó állítást kaptam. Az itt közölt megoldásbeli lemmát Pataki János javaslatára használom fel, ez a megoldást jóval áttekinthetőbbé teszi (azért a háttérben ugyanazok a szinusztételek vannak).