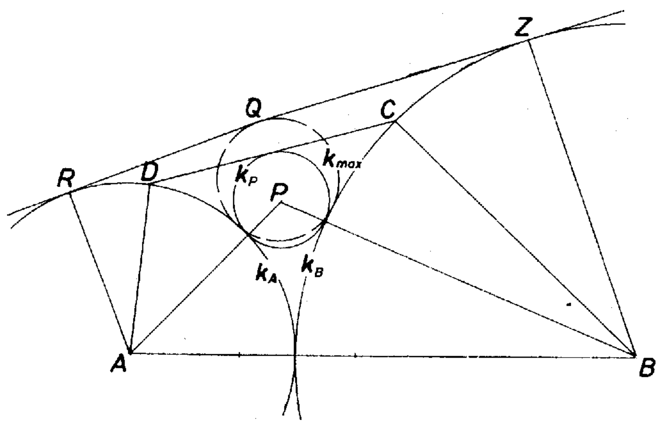
A 2. napon az első nap már elég jól bevált taktikát akartam követni, vagyis a geometria feladattal kezdeni. Az első sikertelen másfél óra után váltottam csak az 5. feladatra. Azt megoldva tértem vissza a 4.-re, és ez „be is jött”.

Az első nehézséget maga az állítás okozta. Mit kezdjek szakaszok négyzetgyökeinek reciprokával? Könnyebben értelmezhetőnek tűnt ehelyett a $\sqrt{AD\cdot BC} \geqq \sqrt{h\cdot AD}+\sqrt{h\cdot BC}$ állítást igazolni. Ezeknek a következő geometriai jelentést tulajdoníthatjuk: könnyen ellenőrizhető, hogy $2\sqrt{xy}$ nem más, mint x és y sugarú egymást kívülről érintő körök közös érintőszakasza.

A következő részcél ilyen körök keresése a négyszögben. Itt sikerült hasznosítanom az első másfél órám eredményeit is. Ez az idő a következő ötletre „ment rá”. Rögzítsük AD, BC hosszát, változtassuk h hosszát, majd egy-egy $((AD;BC;h)$ hármashoz próbáljunk $ABCD$ négyszög(ek)et szerkeszteni.

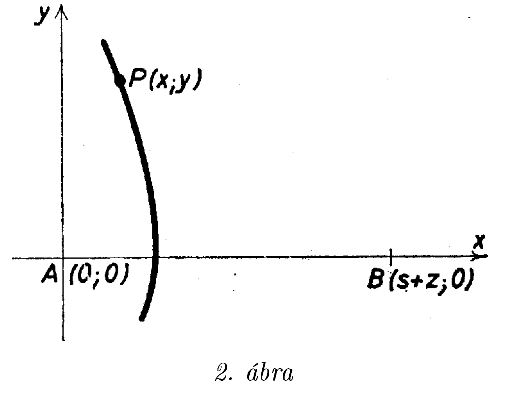
Mivel $AB=AD+BC$; $AP=AD+h$; $BP=BC+h$, ezért ekkor az ABP háromszög megszerkeszthető. A C pont mértani helye a B körüli, BC sugarú k_B kör, a D ponté a hasonló k_A kör. A CD szakasz pedig érinti a P körüli, h sugarú k_P kört. Megvan a három kör! Annak a feltétele, hogy létrejöjjön legalább egy „jó” $ABCD$ négyszög, az, hogy legyen a k_P körnek olyan érintője, amelynek van közös pontja a k_A és k_B körökkel is, méghozzá úgy, hogy a metszéspontok az AB egyenes P felőli partján legyenek, (hogy a négyszög konvex legyen). Ehhez az nyilván elégséges, hogy k_P teljesen az AB felőli partján legyen k_A és k_B közös külső érintőinek; legfeljebb érintse. De ez szükséges is, mert ellenkező esetben a következő igaz: a k_A és k_B bármely X, illetve Y pontját összekötve, ez a szakasz a közös érintő alatt AB felé eső részén) halad, így k_P-t csak oly módon érintheti, ha P a létrejövő $XYAB$ négyszög külső pontja.



1. ábra

Az volt az elképzelésem, hogy igazolom a $\sqrt{AD\cdot BC} \geqq (\sqrt{AD}+\sqrt{BC})\sqrt{h}$ helyességét. Látható, hogy h változtatásával a bal oldal állandó, a jobb oldal pedig ugyanolyan irányban változik. Ha belátnánk, hogy h maximumakor egyenlőség áll fenn, akkor készen lennénk. Az 1. ábrát tanulmányozva észrevehetjük, hogy ha k_P érinti k_A és k_B közös érintőjét, akkor $RQ=2\cdot\sqrt{AD\cdot h}$; $QZ=2\cdot\sqrt{BC\cdot h}$; $RZ=2\cdot\sqrt{AD\cdot BC}$, és $RQ+QZ=RZ$. Azaz itt egyenlőség áll fenn. Vonzónak tűnik belátni, hogy h erre az esetre maximális. Ekkor már az egyenlőség feltétele is megvan: az $ABCD$ derékszögű trapéz ($ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 90°$). Ezt nem túl elegáns úton sikerült befejeznem. Találhattam volna szebb módot is, de az elkövetkezőkben felhasznált részeredményeim már hamarabb elkészültek, így ez tűnt a leggyorsabb útnak.

Legyen koordinátarendszerünk középpontja az A pont, $A(0;0)$; legyen $AD=s$, $BC=z$ és feltehető, hogy $BC\geqq AD$. Mivel $BP-AP=BC-AD=$ konstans, ezért h változtatásával P egy fél hiperbola ágon mozoghat (2. ábra). Ezen látszik, hogy ha x csökken, az y nő (ez az egyenessé torzult hiperbolánál ($AD=BC$) is elfogadható). Belátjuk, hogy h növelésével x csökken (vagy állandó marad, az egyenes esetén), azaz y nő. Így egyre feljebb kerül k_P azon S pontja, amelyre $SP\perp AB$ és S a P fölött van. Ez a pont tehát egyre feljebb kerül, de az érintőnél levő helyzetnél nem mehet tovább. Így valóban az érintőnél lesz h maximális.



2. ábra

Ugyanakkor a $P(x;y)$ pontra $AP=s+h$ azaz
(1) $x^2+y^2=(s+h)^2$; $BP=z+h$, azaz
(2) $(s+z-x)^2+y^2=(z+h)^2$;
ezek különbségéből

$$x=\frac{(s+z)+(s-z)(s+z+2h)}{2(s+z)}.$$

Ez egy elsőfokú függvénye h-nak, és az együtthatója $\frac{s-z}{2(s+z)} \leqq 0$; azaz h növelésével y is nő. Vagyis állításunkat beláttuk.